

Н. М. ГЮНТЕР

ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ
К ОСНОВНЫМ ЗАДАЧАМ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

*акад. В. И. СМЕРНОВА
и проф. Х. Л. СМОЛИЦКОГО*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1953

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
-----------------------	---

Глава I. Вспомогательные теоремы

§	1. О границах областей	11
§	2. О функциях, определенных внутри области	17
§	3. Теорема Гюгонио—Адамара. Дифференцирование функций, заданных на поверхности	21
§	4. Конечное покрытие поверхности	26
§	5. Формулы Остроградского и Стокса	27
§	6. Замечание об интегрировании неограниченных функций	32
§	7. О гармонических функциях	38
§	8. Тождества Грина	40
§	9. Интеграл Гаусса	49
§	10. Другое доказательство формулы Гаусса	52

Глава II. Теория потенциала

§	1. Потенциал простого слоя	55
§	2. Непрерывность потенциала простого слоя	58
§	3. Три теоремы о потенциале двойного слоя	63
§	4. О нормальной производной потенциала простого слоя	74
§	5. Непрерывность нормальной производной потенциала простого слоя	77
§	6. Теорема о нормальной производной потенциала простого слоя	81
§	7. О производных потенциала простого слоя	84
§	8. Производные потенциала простого слоя с дифференцируемой плотностью	87
§	9. Нормальная производная потенциала двойного слоя	89
§	10. Производные потенциала двойного слоя с дифференцируемой плотностью	91
§	11. О сходимости некоторых интегралов	95
§	12. О ньютоновом потенциале	96
§	13. О первых производных ньютонова потенциала	100
§	14. О существовании вторых производных ньютонова потенциала	104
§	15. Теорема Пуассона	110

§ 16. О непрерывности вторых производных ньютонова потенциала	113
§ 17. Производные ньютонова потенциала с дифференцируемой плотностью	115
§ 18. Классы функций $H(l, A, \lambda)$ и поверхности L_k	118
§ 19. Потенциалы простого и двойного слоя для L_k	123
§ 20. Ньютонов потенциал в области, ограниченной поверхностью L_k	127
§ 21. Прямые значения потенциала двойного слоя и нормальной производной потенциала простого слоя на L_k	129
§ 22. Замечания о потенциалах класса $C^{(k)}$	—
§ 23. Потенциалы простого и двойного слоя с суммируемой плотностью	131
§ 24. Ньютонов потенциал с суммируемой плотностью	141

Глава III. Задачи Неймана и Робэна

§ 1. Постановка задачи Неймана	147
§ 2. Замена задачи А другой задачей	149
§ 3. Формальное решение уравнения (В)	152
§ 4. Исследование итерированных ядер	155
§ 5. Фактическое решение уравнения (В)	159
§ 6. Вспомогательная теорема	160
§ 7. Доказательство теорем § 5	167
§ 8. Условие, необходимое для того, чтобы $\zeta = 1$ не было полюсом	171
§ 9. Достаточность найденных условий	174
§ 10. Решение внутренней задачи Неймана	179
§ 11. Решение внешней задачи Неймана для случая (Е) и для обыкновенного случая	184
§ 12. Фундаментальные функции полюса $\zeta = 1$ и задача Робэна для обыкновенного случая	—
§ 13. Фундаментальные функции полюса $\zeta = 1$ и задача Робэна для случая (J)	189
§ 14. Фундаментальные функции полюса $\zeta = 1$ и задача Робэна для случая (Е)	193
§ 15. Исследование полюса $\zeta = -1$ для случая (J)	196
§ 16. Внешняя задача Неймана для случая (J)	201
§ 17. Фундаментальные функции полюса $\zeta = -1$ для случая (J)	202
§ 18. Замечание о принадлежности решения задачи Неймана к классу $H(l, A, \lambda)$	205
§ 19. О единственности решения задачи Неймана	208

Глава IV. Задача Дирихле

§ 1. Постановка задачи Дирихле	213
§ 2. Замена задачи А другой задачей	215
§ 3. Формальное решение задачи С	216
§ 4. Фактическое решение задачи С	218

§ 5.	Некоторые замечания об ядре $K_n(1, 0)$	220
§ 6.	Доказательство предложений § 4	222
§ 7.	Две леммы, относящиеся к уравнению с ядром $K_n(1, 0)$	229
§ 8.	Две леммы о потенциале двойного слоя	232
§ 9.	Следствия из лемм § 8	238
§ 10.	Решение внутренней задачи Дирихле для случая (Е) и для обыкновенного случая	239
§ 11.	Исследование полюса $\zeta = 1$ для случая (Е) и для обыкновенного случая	240
§ 12.	Истолкование условий (42)	243
§ 13.	Решение внешней задачи для случая (Е)	244
§ 14.	Случай (J). Исследование условия: $\zeta = -1$ не полюс	247
§ 15.	Решение задачи с условиями (53); значение этих условий	249
§ 16.	Решение внутренней задачи Дирихле для случая (J)	251
§ 17.	Внешняя задача для случая (J)	253
§ 18.	Замечание о принадлежности решения задачи Дирихле к классу $H(I, A, \lambda)$	257

Глава V. Функции Грина и их приложения

§ 1.	Функция Грина и ее основные свойства	261
§ 2.	Решение задачи Дирихле для одного частного случая	264
§ 3.	Лемма Ляпунова	266
§ 4.	Решение задачи Дирихле в общем случае	268
§ 5.	Функция Ф. Неймана и ее свойства	271
§ 6.	Решение задачи Неймана	277
§ 7.	Задача о стационарной температуре	278
§ 8.	Функция Грина в задаче о стационарной температуре	285
§ 9.	Функция Грина и уравнение Пуассона	287
§ 10.	Задачи, относящиеся к уравнению $\Delta u = Lu + K$	298
§ 11.	Лемма	304
§ 12.	Замечания относительно полюсов решения интегрального уравнения	307
§ 13.	Замкнутость последовательности фундаментальных функций в некотором частном функциональном пространстве	310
§ 14.	Замкнутость последовательности фундаментальных функций	314
§ 15.	О разложении по фундаментальным функциям	317
§ 16.	Функции А Корна	321
§ 17.	Интегрирование волнового уравнения	324
§ 18.	() тепловой задаче	331
§ 19.	Замечание о задачах, связанных с лапласианом	335
§ 20.	Замечание о решении уравнения Пуассона и фундаментальных функциях	336

Дополнения

I. Теорема Ляпунова о первых производных потенциала простого слоя, плотность которого правильно непрерывна	341
II. Теоремы Ляпунова относительно нормальной производной потенциала двойного слоя	356
III. Теорема о вторых производных ньютонова потенциала	366
IV. Прямые значения потенциала двойного слоя и нормальной производной потенциала простого слоя на L_k . .	373
<hr/>	
Биографический очерк	393
Список научных трудов	406

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является переводом книги Н. М. Гюнтера „La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique“, вышедшей в 1934 г. в Париже. Эта книга возникла из работ специального семинара по теории потенциала, который Н. М. Гюнтер проводил в начале двадцатых годов в Ленинградском университете.

Теория потенциала и связанные с ней вопросы математической физики уже с начала XIX века были в центре внимания математиков. Но до самого конца XIX века не было проведено строгого исследования свойств различных потенциалов, и тем самым имелся целый ряд необоснованных моментов при применении теории потенциала к предельным задачам математической физики. С другой стороны до конца XIX века не было сколько-нибудь отчётливых и глубоких результатов, касающихся свойств решений этих задач при приближении к границе.

Существенное значение в преодолении этих недостатков имела известная работа А. М. Л. пунова „Sur certaines questions qui se rattachent aux problèmes de Dirichlet“ (1898 г.). Книга Н. М. Гюнтера в некоторой части её была существенно связана с результатами этой работы, и цель этой книги состояла в уточнении и более детальном исследовании свойств различных потенциалов и связанных с ними предельных задач математической физики.

При переводе книги в неё были внесены изменения. Они сводились к следующему: уточнение изложения в отдельных неточных местах, упрощение некоторых громоздких доказательств и добавление нового материала. Последнее было сделано с тем, чтобы приблизить содержание книги к современному положению соответствующих вопросов науки.

Перечислим наиболее существенные добавления и изменения.

В главе второй добавлено исследование потенциала двойного слоя в том случае, когда плотность удовлетворяет условию Гельдера, и, кроме того, приведено определение обобщенного оператора Лапласа согласно И. И. Привалову и соответствующая теорема. В конце той же главы сделан ряд существенных добавлений. Исследованы свойства потенциала объемных масс, простого и двойного слоя с гладкими плотностями и границами. При тех же условиях гладкости исследованы свойства прямых значений потенциала двойного слоя и нормальной производной потенциала простого слоя. Доказательство указанных свойств приведено в добавлении. Кроме того, приведены недавние результаты, касающиеся свойств потенциалов объемных масс, простого и двойного слоя для суммируемой плотности в предположении, что граница области есть поверхность Ляпунова.

В третьей главе изменено доказательство применимости формулы Грина к потенциалу простого слоя с непрерывной плотностью. Добавлено доказательство единственности решения задачи Неймана, взятое из работы М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева, и исследование свойств решения задачи Неймана для гладких предельных значений и гладких поверхностей.

В главе четвертой сделано лишь одно добавление, посвященное исследованию свойств решений задачи Дирихле при указанных выше условиях гладкости.

Наибольшим изменениям подверглась пятая глава, содержащая теорию функций Грина, и интегральные уравнения, связанные с предельными задачами для волнового уравнения, и уравнения теплопроводности. Изменено в начале главы доказательство представления функции Грина потенциалом простого слоя. Добавлен ряд оценок для функции Грина и Ф. Неймана. Добавлен новый параграф „Функция Грина и уравнение Пуассона“, посвященный исследованию функций, имеющих интегральное представление, ядро которого есть функция Грина или Ф. Неймана. Вводится при этом еще одна обобщенная функция Грина. В связи со сказанным выше несколько перестроено исследование уравнения $\Delta u = Lu + K$.

Изменено изложение основной теоремы о разложении по фундаментальным функциям и теоремы В. А. Стеклова. При-

ведены новые результаты о решении граничной задачи для волнового уравнения, и в конце пятой главы сделано добавление о свойствах фундаментальных функций для областей с гладкой границей.

Сложные доказательства ряда теорем в книге Н. М. Гюнтера были помещены в четырех дополнениях в конце книги. В настоящем издании в дополнении первом упрощено доказательство за счет использования предыдущих результатов. Существенно изменено изложение третьего дополнения. Четвертое дополнение старого текста, посвященное вопросу о замкнутости в классе ограниченных и интегрируемых с квадратом функций, исключено, поскольку это вошло в основной текст. Четвертое дополнение настоящего издания посвящено изучению прямых значений потенциалов двойного слоя на гладкой поверхности.

Указанные выше изменения и добавления в тексте проделаны Х. Л. Смолицким.

В конце книги даны биографический очерк и список трудов Н. М. Гюнтера.

В. И. Смирнов

ГЛАВА I

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

§ 1. О границах областей

Мы будем предполагать всегда, что рассматриваемые области ограничены конечным числом замкнутых поверхностей, удовлетворяющих трём условиям Ляпунова:

1°. В каждой точке поверхности существует определенная касательная плоскость и, следовательно, определенная нормаль.

2°. Если ϑ есть угол между нормальными в точках m_1 и m_2 , и r есть расстояние между этими точками, то

$$\vartheta < Er^\lambda, \quad (0 < \lambda \leq 1) \quad (1)$$

где E и λ вполне определённые числа.

3°. Существует число d , одно и то же для всех точек поверхности и обладающее свойством: параллели к нормали в точке m поверхности пересекают не более чем в одной точке часть поверхности, находящуюся внутри сферы радиуса d и с центром в m (рис. 1).

Если d задано, то всякое число, меньшее d , обладает тем же свойством, что позволит нам выбрать d подходящим образом. Мы назовём вышеупомянутые сферы сферами Ляпунова.

В некоторой точке m поверхности выберем нормаль в качестве оси Oz , выбрав оси $O\xi$ и $O\eta$ в касательной плоскости в m .

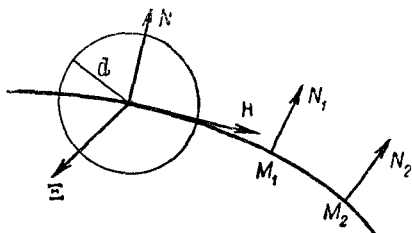


Рис. 1.

В силу условия 3° уравнение части поверхности внутри сферы Ляпунова с центром в m имеет вид:

$$\zeta = \Phi(\xi, \eta), \quad (2)$$

где $\Phi(\xi, \eta)$ однозначная функция в некоторой области (Λ) плоскости (ξ, η) .

В силу условия 1° функция $\Phi(\xi, \eta)$ имеет в (Λ) первые производные по ξ и η , которые в силу условия 2° непрерывны.

В дальнейшем поверхность будем обозначать (S) .

Пусть φ — угол между нормалью к поверхности (S) в некоторой точке с осью $O\zeta$, а r — расстояние этой точки до m . Если d настолько мало, что $Ed^\lambda < 1$, то для точек (S) внутри сферы Ляпунова имеем

$$\varphi < Er^\lambda < Ed^\lambda < 1$$

и, следовательно,

$$\cos \varphi > 1 - \frac{\varphi^2}{2} > \frac{1}{2}.$$

С другой стороны,

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\Phi'_\xi)^2 + (\Phi'_\eta)^2}},$$

и поэтому

$$\sqrt{(\Phi'_\xi)^2 + (\Phi'_\eta)^2} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} < \frac{\varphi}{1 - \frac{\varphi^2}{2}} < \frac{Er^\lambda}{1 - \frac{1}{2}E^2r^{2\lambda}},$$

т. е.

$$\sqrt{(\Phi'_\xi)^2 + (\Phi'_\eta)^2} < \frac{Er^\lambda}{1 - \frac{1}{2}E^2r^{2\lambda}} < \frac{Ed^\lambda}{1 - \frac{1}{2}E^2d^{2\lambda}}. \quad (3)$$

Лемма. Если d таково, что

$$Ed^\lambda < \frac{1}{2}, \quad (4)$$

то сечение части (S) внутри сферы Ляпунова любой плоскостью, проходящей через ось $O\zeta$, есть непрерывная кривая.

Заметим, что на основании формул (3) и (4) имеем:

$$\sqrt{(\Phi'_\xi)^2 + (\Phi'_\eta)^2} < \frac{Er^\lambda}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{8}{7}Er^\lambda < \frac{8}{7}Ed^\lambda < \frac{4}{7}. \quad (5)$$

Выберем плоскость сечения плоскостью $O\xi$ и рассмотрим часть сечения для $\xi > 0$. Рассматриваемое сечение проходит через точку m . Пусть при движении по сечению из точки m кривая первый раз выходит из сферы в точке m_1 , с абсциссой ξ_1 . Покажем, что внутри сферы нет точек сечения с абсциссой, превосходящей ξ_1 (рис. 2).

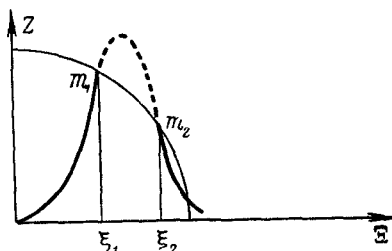


Рис. 2.

Допустим, что такие точки есть. Пусть m_2 — та из точек, абсцисса ξ_2 которой имеет наименьшее значение. Тогда в точке m_2 касательная к сечению образует с осью $O\xi$ угол, не меньший, чем угол между касательной к окружности в точке m_2 и осью $O\xi$.

Следовательно, имеем:

$$|\Phi'_\xi(\xi_2, 0)| > \frac{\xi_2}{\sqrt{d^2 - \xi_2^2}} > \frac{\xi_2}{d},$$

откуда

$$\xi_2 < d |\Phi'_\xi(\xi_2, 0)|,$$

и потому

$$\xi_1 < d |\Phi'_\xi(\xi_2, 0)|. \quad (6)$$

С другой стороны,

$$\xi_1 = \Phi(\xi_1, 0) - \Phi(0, 0) = \Phi'_\xi(\theta\xi_1, 0), \quad (0 < \theta < 1)$$

и поэтому

$$d = \sqrt{\xi_1^2 + \zeta_1^2} = \xi_1 \sqrt{1 + (\Phi'_\xi(\theta\xi_1, 0))^2}. \quad (7)$$

Поэтому в силу (7), (6) и (5)

$$\begin{aligned} d < d |\Phi'_\xi(\xi_2, 0)| \sqrt{1 + (\Phi'_\xi(\theta\xi_1, 0))^2} &< d \cdot \frac{4}{7} \sqrt{1 + \frac{16}{49}} = \\ &= d \cdot \frac{4\sqrt{65}}{49} < d, \end{aligned}$$

что невозможно.

Таким образом, предположение о существовании точки m_2 ведёт к противоречию, что доказывает лемму.

Кроме того, из (7) и (5) следует:

$$\xi_1 = \frac{d}{\sqrt{1 + (\Phi'_\xi(\theta\xi_1, 0))^2}} > \frac{d}{\sqrt{1 + \frac{16}{49}}} = \frac{7}{\sqrt{65}} d > \frac{7}{9} d,$$

т. е. область (Λ) звёздна относительно точки m и содержит круг радиуса $\frac{7}{9}d$ с центром в m .

Теорема. Если поверхность (S) удовлетворяет трём условиям Ляпунова и условию (4), то можно указать число ω , обладающее свойством: всякая прямая, образующая с нормалью в m угол меньше, чем ω , пересекает не более чем в одной точке часть (S) , лежащую внутри сферы Ляпунова с центром в m .

Действительно, в силу леммы сфера Ляпунова поверхностью (S) разбивается на две части, которые назовём верхней и нижней. Прямая, пересекающая поверхность (S) , в точке пересечения переходит из одной части сферы в другую, либо касается поверхности (S) . Прямая не может перейти из одной части сферы в другую, не пересекая поверхности (S) .

Пусть нормаль к (S) направлена в верхнюю часть сферы и пусть $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы прямой, пересекающей по меньшей мере два раза (S) внутри сферы Ляпунова. Покажем, что в (Λ) найдётся точка (ξ_0, η_0) такая, что

$$\cos \gamma - \Phi'_\xi(\xi_0, \eta_0) \cos \alpha - \Phi'_\eta(\xi_0, \eta_0) \cos \beta = 0. \quad (8)$$

Действительно, если прямая касается поверхности (S) , то равенство (8) имеет место в точке касания. Если прямая пересекает поверхность (S) , то в двух смежных точках пересечения левая часть равенства (8) имеет разные знаки, так как в одной из точек пересечения прямая переходит из нижней части сферы в верхнюю, в другой точке — из верхней в нижнюю и образует с нормалью к (S) в первой точке острый, а во второй точке тупой угол. Следовательно, в некоторой точке (ξ_0, η_0) области (Λ) имеет место (8), так как левая часть (8) непрерывна в (Λ) и имеет значения разных знаков. Из (8) применением неравенства Буняковского —

Шварца следует:

$$\begin{aligned}\cos^2 \gamma &= (\Phi'_\xi \cos \alpha + \Phi'_\eta \cos \beta)^2 \leq (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) (\Phi'^2_\xi + \Phi'^2_\eta) = \\ &= (1 - \cos^2 \gamma) (\Phi'^2_\xi + \Phi'^2_\eta)\end{aligned}$$

и далее

$$\cos^2 \gamma \leq \frac{\Phi'^2_\xi + \Phi'^2_\eta}{1 + \Phi'^2_\xi + \Phi'^2_\eta},$$

и в силу неравенства (3)

$$|\cos \gamma| < \frac{Er^\lambda}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} E^4 r^{4\lambda}}} < \frac{Ed^\lambda}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} E^4 d^{4\lambda}}}. \quad (9)$$

Пусть

$$\omega = \arccos \frac{Ed^\lambda}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} E^4 d^{4\lambda}}}. \quad (10)$$

Тогда прямая, образующая с осью $O\xi$ угол меньше ω , не может пересечь (S) внутри сферы Ляпунова в двух точках.

Проведём через m прямую, образующую с $O\xi$ угол ω ; конус, образованный вращением этой прямой вокруг оси $O\xi$, будем в дальнейшем называть конусом (2ω) (рис. 3).

Когда d стремится к нулю, ω стремится к $\frac{\pi}{2}$. Мы будем предполагать всегда в дальнейшем, что ω больше $\frac{\pi}{3}$. Это имеет место, если выполнено неравенство (4). Пред-

положим, что оси координат Ox , Oy , Oz выбраны произвольно. Так как

$$\cos^2(Nx) + \cos^2(Ny) + \cos^2(Nz) = 1,$$

то один из углов (Nx) , (Ny) , (Nz) меньше $\frac{\pi}{3}$.

Отсюда следует, что одна из осей Ox , Oy , Oz образует с нормалью N угол меньше ω , и параллели этой оси пересекают (S) внутри сферы Ляпунова не более чем в одной

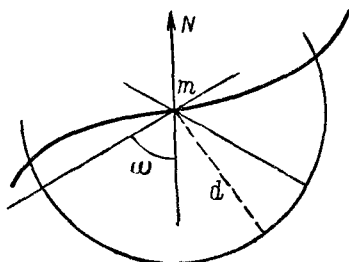


Рис. 3.

точке. Отсюда вытекает, что внутри каждой сферы Ляпунова уравнение поверхности имеет по меньшей мере одну из трёх следующих форм:

$$z = F(x, y), \text{ или } x = F(y, z), \text{ или } y = F(z, x). \quad (11)$$

Заметим ещё, что при выполнении неравенства (4) можно образовать прямоугольную систему координат, имеющую точку m началом, и такую, что все три оси координат будут внутри конуса (2ω).

Заметим, что угол между нормалью в какой-либо точке внутри сферы Ляпунова с нормалью в центре сферы не превосходит Ed^{λ} . Выбором достаточно малого d этот угол можно сделать как угодно малым; если, например, $Ed^{\lambda} < 0,017$, то вышеупомянутый угол меньше 1° и тогда угол ω превосходит 89° .

Этот параграф заключим оценками, которыми в дальнейшем будем часто пользоваться, главным образом начиная со второй главы.

Пусть точка m лежит на части (S) внутри сферы Ляпунова с центром в m_0 . Тогда прямая m_0m пересекает поверхность внутри сферы в двух точках и, следовательно, образует с нормалью в m_0 угол α , больший, чем ω . Обозначая через r длину m_0m , а через ρ — проекцию этого отрезка на касательную плоскость в m_0 , будем иметь:

$$\rho = r \sin \alpha > r \sin \omega$$

и, следовательно,

$$\rho < r < \frac{\rho}{\sin \omega} < 2\rho. \quad (12)$$

Поэтому из неравенств (3) и (4) следует:

$$V(\Phi'_{\xi})^2 + (\Phi'_{\eta})^2 < \left(\frac{8E}{7 \sin^2 \omega} \right) \rho^{\lambda} = a\rho^{\lambda}. \quad (13)$$

Кроме того, имеем:

$$\zeta = \Phi(\xi, \eta) = \Phi(\xi, \eta) - \Phi(0, 0) = \xi \Phi'_{\xi}(\theta \xi, \theta \eta) + \eta \Phi'_{\eta}(\theta \xi, \theta \eta),$$

$$(0 < \theta < 1).$$

Применяя неравенство Буняковского и учитывая (13), найдем:

$$|\zeta| < \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \sqrt{(\Phi'_\xi(\theta\xi, 0\eta))^2 + (\Phi'_\eta(\theta\xi, 0\eta))^2} < \\ < \rho \sqrt{a^2 \bar{\rho}^{2\mu} \bar{\eta}^{2\lambda}} < a\rho^{1+\lambda},$$

г. е.

$$|\zeta| < a\rho^{1+\lambda}. \quad (14)$$

Пусть N нормаль в какой-либо точке поверхности (S) ; будем её считать направленной в ту же сторону от поверхности, что и ось ζ . Для точки внутри сферы Ляпунова имеем в силу (5) следующую оценку:

$$\cos(N\zeta) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\Phi'_\xi)^2 + (\Phi'_\eta)^2}} > \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16}{49}}} > \frac{1}{2},$$

т. е.

$$\cos(N\zeta) > \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Пусть $d\sigma^{(0)}$ означает элемент площади касательной плоскости $\xi\eta$, в которой проектируется элемент площади $d\sigma$ поверхности (S) . Если в плоскости $\xi\eta$ ввести полярные координаты (ρ, φ) , то в силу (15) имеем:

$$d\sigma = \frac{d\sigma^{(0)}}{\cos(N\zeta)} < 2d\sigma^{(0)} = 2\rho d\rho d\varphi. \quad (16)$$

Наконец, из неравенства (9) следует такой вывод: пусть r есть расстояние между двумя точками (S) , и N нормаль к (S) в первой из этих точек. Если $r < d$, то прямая, соединяющая эти точки, пересекает часть (S) внутри сферы Ляпунова с центром в первой точке не менее двух раз и поэтому

$$|\cos(rN)| = |\cos \gamma| < Er^\lambda,$$

т. е.

$$|\cos(rN)| < Er^\lambda. \quad (17)$$

§ 2. О функциях, определенных внутри области

Поверхности, которые удовлетворяют трём условиям § 1, мы будем называть поверхностями Ляпунова.

Будем всегда предполагать, что граница области (D) состоит из конечного числа замкнутых поверхностей Ляпунова.

Непрерывные функции, определённые внутри области (D) , будем делить на три категории:

а) будем говорить, что функция точки m

$$f(m) = f(x, y, z)$$

непрерывна *внутри* (D) , если каково бы ни было положительное число ε , можно найти для каждой точки m_0 число h_0 такое, что

$$|f(m) - f(m_0)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad mm_0 < h_0;$$

б) будем говорить, что функция f *равномерно непрерывна* в (D) , если число h_0 не зависит от положения точки m_0 ; оно тогда равно числу h , зависящему только от ε ;

в) будем говорить, что функция f *правильно непрерывна* в (D) , если для любой пары точек m_0 и m , расстояние между которыми равно r , имеем:

$$|f(m) - f(m_0)| < Ar^\lambda, \quad (0 < \lambda \leq 1)$$

где A и λ — определённые числа, не зависящие от m_0 и m .

Функция правильно непрерывная, очевидно, равномерно непрерывна.

Теорема. Если функция $f(m)$ равномерно непрерывна *внутри* (D) , то $f(m)$ имеет определённый предел, когда m стремится к точке m_0 границы (D) .

Действительно, можно указать такое h_0 , что для любой пары точек m_1 и m_2 области (D) , для которых $m_1 m_2 < h_0$, имеем:

$$|f(m_1) - f(m_2)| < 1.$$

Обозначим через $\varphi(h)$ точную верхнюю грань чисел $|f(m_1) - f(m_2)|$, где m_1 и m_2 любая пара точек из области (D) , для которых $m_1 m_2 < h$, где $0 < h < h_0$.

Очевидно, $0 \leq \varphi(h) \leq 1$ и $\varphi(h)$ неубывающая функция h . Так как функция $f(m)$ равномерно непрерывна, то $\varphi(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Из определения $\varphi(h)$ имеем: $|f(m_1) - f(m_2)| \leq \varphi(h)$, лишь только $m_1 m_2 \leq h$.

Пусть теперь m_0 точка границы области (D) . Тогда расстояние между двумя любыми точками m_1 и m_2 области (D) , лежащими внутри сферы радиуса $\frac{h}{2}$ с центром в m_0 , меньше h

и поэтому

$$|f(m_1) - f(m_2)| \leq \varphi(h) \leq \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $f(m)$ имеет предел при $m \rightarrow m_0$. Этот предел обозначим $\bar{f}(m_0)$. Считая в предыдущем неравенстве, что $m_0 \rightarrow m_0$, получим:

$$|f(m_1) - \bar{f}(m_0)| \leq \varphi(h), \text{ если } m_1 m_0 < \frac{h}{2}.$$

Предел $\bar{f}(m_0)$ есть функция точек (S) , равномерно непрерывная на (S) . Действительно, пусть m_0 и m_1 две точки поверхности (S) , расстояние между которыми r . Тогда расстояние от точки m_1 до любой точки m_2 , лежащей внутри области (D) и сферы радиуса $2r$ с центром в m_0 , не превосходит $3r$; поэтому

$$|\bar{f}(m_1) - f(m_2)| \leq \varphi(6r)$$

и, следовательно, при $m_2 \rightarrow m_0$ получим:

$$|\bar{f}(m_1) - \bar{f}(m_0)| \leq \varphi(6r),$$

что и доказывает наше утверждение.

Если $f(m)$ правильно непрерывна в (D) , то $\varphi(r) \leq Ar^\lambda$, и, таким образом, получаем:

$$|f(m_1) - \bar{f}(m_0)| \leq A(6r)^\lambda = 6^\lambda Ar^\lambda = Br^\lambda$$

и, следовательно, предельные значения на (S) функции правильно непрерывной в (D) образуют функцию правильно непрерывную на (S) . Отметим, что если $f(m)$ равномерно непрерывна в конечной области (D) , то она ограничена.

Теорема. Если первые производные функции $f(m)$ ограничены в (D) , то f правильно непрерывна.

Если точки m_1 и m_2 можно соединить отрезком, не пересекающим (S) , то высказанное утверждение есть непосредственное следствие формулы Лагранжа, причем

$$\lambda = 1, \quad A = B\sqrt{3},$$

где B есть верхняя граница модулей первых производных функции f .

Если расстояние между m_1 и m_2 меньше $\frac{d}{2}$, а расстояние от каждой из них до границы больше $\frac{d}{2}$, то их можно

где r расстояние между m_1 и m_2 ; аналогично

$$m_2 m' < \frac{r}{\sin \omega}.$$

Отсюда следует, что

$$|f(m_1) - f(m_2)| \leq |f(m_1) - f(m')| + |f(m') - f(m_2)| < \\ < 2\sqrt{3}B \cdot \frac{r}{\sin \omega}.$$

§ 3. Теорема Гюгонио — Адамара. Дифференцирование функций, заданных на поверхности

Предположим, что функция $f(x, y, z)$ имеет внутри (D) равномерно непрерывные первые производные. При этих условиях $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ имеют определённые пределы, если m стремится к точке m_0 поверхности (S) . Эти пределы обозначим $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$. Соединим две точки m_1 и m_2 внутри (D) кривой

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (18)$$

такой, что функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ имеют первые производные. Значение f на кривой (18) есть функция t , и известно, что

$$\frac{d\bar{f}}{dt} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \varphi'(t) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \psi'(t) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \chi'(t), \quad (19)$$

где \bar{f} означает значение f на кривой.

Предположим теперь, что кривая (18) лежит на границе. Значения (f) , $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$ суть функции t .

Лемма. Если кривая (18) лежит на границе (D) , то

$$\frac{d(f)}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \varphi'(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \psi'(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \chi'(t). \quad (20)$$

Для доказательства леммы мы можем предположить, что дуга $m_1 m_2$ кривой настолько мала, что она расположена в сфере Ляпунова с центром в m_1 .

Пусть m' точка кривой (18), отвечающая значению t параметра. Проведем через m' параллель нормали в m_1 и отложим на ней внутрь (D) отрезок длины η . Геометрическое место концов этих отрезков есть кривая (рис. 5)

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t) + \eta \cos(Nx), \\ y &= \psi(t) + \eta \cos(Ny), \\ z &= \chi(t) + \eta \cos(Nz). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Поскольку формула (19) справедлива для кривой (21), имеем:

$$\frac{d\bar{f}}{dt} = f'_x [\varphi + \eta \cos(Nx), \psi + \eta \cos(Ny), \chi + \eta \cos(Nz)] \varphi'(t) + \dots,$$

откуда, интегрируя

$$\bar{f}_1 - \bar{f} = - \int_t^{t_1} \{ f'_x [\varphi + \eta \cos(Nx), \psi + \eta \cos(Ny), \chi + \eta \cos(Nz)] \times \\ \times \varphi'(t) + \dots \} dt,$$

если обозначить через \bar{f}_1 значение f для $t = t_1$.

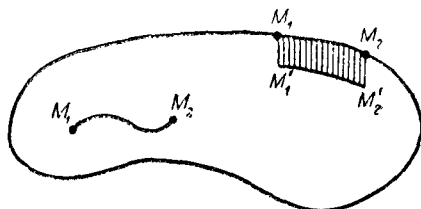


Рис. 5.

Так как функция под знаком интеграла стремится равномерно к своему пределу при η , стремящемся к нулю, то получаем, переходя к пределу:

$$(f_1) - (f) = \int_t^{t_1} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \varphi'(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \psi'(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \chi'(t) \right\} dt,$$

где (f_1) и (f) означают пределы \bar{f}_1 и \bar{f} . Деля последнее равенство на $t_1 - t$ и устремляя затем t_1 к t , получим (20).

Предположим, что в областях, внутренних к сфере Ляпунова, и ограниченных частью поверхности (S) и частями сферы, заданы две функции f и F (различные, если они определены в одной и той же области) такие, что

$$f = F \quad \text{на } (S). \quad (22)$$

Предположим, что каждая из функций f и F имеет в своей области существования равномерно непрерывные первые производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}; \quad \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z},$$

принимаяющие на (S) значения

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right); \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right), \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right), \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right).$$

Теорема (Гюнионио — Адамара). *Во всех точках (S) имеем:*

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\cos(Nx)} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)}{\cos(Ny)} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)}{\cos(Nz)}. \quad (23)$$

Предположим, что (18) есть произвольная кривая на (S) . Так как во всех точках кривой $(f) - (F) = 0$, то согласно лемме

$$\begin{aligned} \frac{d[(f) - (F)]}{dt} &= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \right] \varphi'(t) + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \right] \psi'(t) + \\ &+ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) \right] \chi'(t) = 0. \end{aligned}$$

Так как кривая (18) расположена на (S) , то имеем:

$$\varphi'(t) \cos(Nx) + \psi'(t) \cos(Ny) + \chi'(t) \cos(Nz) = 0.$$

Исключая $\chi'(t)$ из двух последних равенств, получим:

$$\begin{aligned} &\left\{ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \right] \cos(Nz) - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) \right] \cos(Nx) \right\} \varphi'(t) + \\ &+ \left\{ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \right] \cos(Nz) - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) \right] \cos(Ny) \right\} \psi'(t) = 0. \end{aligned}$$

Значения $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ можно выбирать произвольно, вследствие чего имеем:

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \right] \cos(Nz) - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) \right] \cos(Nx) = 0,$$

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \right] \cos(Nz) - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) \right] \cos(Ny) = 0;$$

отсюда и следуют формулы (23).

Условимся называть выражение

$$\frac{df}{dn} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \cos(Nx) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \cos(Ny) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \cos(Nz) \quad (24)$$

нормальной производной функции f .

Если на нормали к (S) в точке m_1 возьмём точку m_2 и будем искать предел выражения

$$\frac{f(m_2) - f(m_1)}{|m_1 m_2|} \quad (m_2 \rightarrow m_1),$$

то придём к выражению (24). Легко видеть, что отношения (23) равны следующему:

$$\frac{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \right] \cos(Nx) + \dots}{\cos^2(Nx) + \dots} = \frac{df}{dn} - \frac{dF}{dn}.$$

Равенства (23), следовательно, эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) &= \left(\frac{df}{dn} - \frac{dF}{dn} \right) \cos(Nx), \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) &= \left(\frac{df}{dn} - \frac{dF}{dn} \right) \cos(Ny), \\ \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) &= \left(\frac{df}{dn} - \frac{dF}{dn} \right) \cos(Nz), \end{aligned}$$

из которых вытекает:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{df}{dn} \cos(Nx) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) - \frac{dF}{dn} \cos(Nx), \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{df}{dn} \cos(Ny) &= \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) - \frac{dF}{dn} \cos(Ny), \\ \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{df}{dn} \cos(Nz) &= \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) - \frac{dF}{dn} \cos(Nz). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Левые части равенств (25) не зависят от выбора функции F , а правые — от выбора функции f . Эти функции связаны лишь условием (22). Отсюда следует, что левые и правые части равенств (25) зависят только от значений функций f и F на (S) .

Если на (S) задана функция μ , а функция f удовлетворяет перечисленным выше условиям и, кроме того,

$$(f) = \mu,$$

то положим по определению

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}_x \mu &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{df}{dn} \cos(Nx), \\ \mathcal{D}_y \mu &= \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{df}{dn} \cos(Ny), \\ \mathcal{D}_z \mu &= \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{df}{dn} \cos(Nz). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

При условиях, которые были наложены на функцию f , комбинации $\mathcal{D}_x \mu$, $\mathcal{D}_y \mu$, $\mathcal{D}_z \mu$ являются функциями непрерывными на (S) .

Замечим, что комбинации (26) не независимы. В каждой точке имеем равенство

$$\cos(Nx) \mathcal{D}_x \mu + \cos(Ny) \mathcal{D}_y \mu + \cos(Nz) \mathcal{D}_z \mu = 0,$$

показывающее, что вектор с проекциями $\mathcal{D}_x \mu$, $\mathcal{D}_y \mu$, $\mathcal{D}_z \mu$ лежит в касательной плоскости к поверхности.

Изучим этот вектор. Рассмотрим касательную плоскость в некоторой точке m_0 на (S) . Тогда каждая точка p касательной плоскости из некоторой окрестности точки m_0 является проекцией единственной точки m части поверхности (S) внутри сферы Ляпунова с центром в m_0 . Функция μ на (S) определяет функцию $\mu(p)$ в касательной плоскости, если положить $\mu(p) = \mu(m)$. Если определить функцию f равной $\mu(p)$ в точках касательной плоскости и принимающей одинаковые значения вдоль перпендикуляров к плоскости, то в точке m_0 имеем $\frac{df}{dn} = 0$ и, следовательно,

$$\mathcal{D}_x \mu = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \mathcal{D}_y \mu = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \mathcal{D}_z \mu = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Таким образом, изучаемый вектор равен градиенту функции f в точке m_0 . При нашем выборе функции f этот градиент совпадает с градиентом функции $\mu(p)$, рассматриваемой как определённой в касательной плоскости.

Если функция μ , заданная на (S) , допускает комбинации $\mathcal{D}_x \mu$, $\mathcal{D}_y \mu$, $\mathcal{D}_z \mu$, то будем называть функцию μ дифференцируемой на (S) .

Введение комбинаций $\mathcal{D}_x \mu$, $\mathcal{D}_y \mu$, $\mathcal{D}_z \mu$ облегчает преобразование интегралов по поверхности.

В заключение этого параграфа отметим без доказательства формулы, часть из которых будет в дальнейшем использована.

О поверхности (S) сделаем дополнительное предположение: предположим, что в формулах (11) уравнений поверхности функция F имеет вторые непрерывные производные. При этом условии поверхность (S) имеет непрерывные элементы кривизны, и справедливы формулы

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}_x \cos(Nx) &= \frac{\cos^2(L_1x)}{R_1} + \frac{\cos^2(L_2x)}{R_2}, \\ \mathcal{D}_x \cos(Ny) &= \frac{\cos(L_1x) \cos(L_1y)}{R_1} + \frac{\cos(L_2x) \cos(L_2y)}{R_2}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где R_1 и R_2 — радиусы кривизны главных сечений, имеющих на поверхности (S) направления L_1 и L_2 .

Из формул (27) и им аналогичных следует:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x \cos(Ny) &= \mathcal{D}_y \cos(Nx), \\ \mathcal{D}_x \cos(Nz) &= \mathcal{D}_y \cos(Nx), \\ \mathcal{D}_y \cos(Nz) &= \mathcal{D}_z \cos(Nx). \end{aligned}$$

В дальнейшем мы встретимся с комбинацией

$$\mathcal{D}_x \cos(Nx) + \mathcal{D}_y \cos(Ny) + \mathcal{D}_z \cos(Nz),$$

которую обозначим K ; первая из формул (27) показывает, что

$$K = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

и значит K есть средняя кривизны (S) .

§ 4. Конечное покрытие поверхности

Пусть (S) — замкнутая поверхность Ляпунова. Покажем, что можно построить конечное число сфер Ляпунова таких, что каждая точка (S) была бы внутри хотя бы одной из сфер.

Действительно, рассмотрим куб с рёбрами, параллельными осям координат, и содержащий внутри поверхность (S) . Пусть l — длина ребра. Пусть n — настолько большое целое число, что имеет место неравенство

$$q = \frac{l}{n} < \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Разобьём куб на n^3 малых кубов с рёбрами, равными q . Некоторые из этих кубов будут иметь общие точки с (S) и число Q таких кубов не превосходит n^3 . Если внутри или на границе куба с ребром q находится точка m_0 поверхности (S) , то куб находится весь внутри сферы Ляпунова с центром в m_0 , так как диагональ куба меньше d . Образуя так сферы около каждого куба, имеющего общую точку с (S) , получим Q сфер Ляпунова, обладающих упомянутым выше свойством (рис. 6).

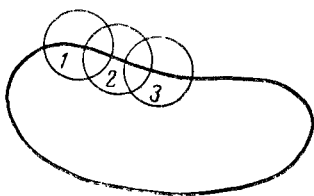


Рис. 6.

Если радиус d сферы Ляпунова удовлетворяет условию (4), то уравнение поверхности внутри сферы Ляпунова, а поэтому и части, лежащей внутри куба, имеет одну из форм (11). Более того, при подходящем выборе системы координат уравнение поверхности может быть представлено в каждой из форм (11). Это обстоятельство используется при выводе интегральных формул Остроградского и Стокса.

§ 5. Формулы Остроградского и Стокса

Теорема 1. Если конечная область (D) ограничена конечным числом замкнутых поверхностей или кусков поверхностей, удовлетворяющих условиям Ляпунова, и если функции U , V , W имеют внутри (D) непрерывные и ограниченные первые производные, то

$$\begin{aligned} \int_{(D)} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) d\tau = \\ = \int_{(S)} [U \cos(Nx) + V \cos(Ny) + W \cos(Nz)] d\sigma; \quad (28) \end{aligned}$$

в этой формуле N означает направление внешней нормали к (S) , $d\tau$ — элемент объема, $d\sigma$ — элемент площади поверхности.

Эта формула называется формулой Остроградского.

Доказательство теоремы имеется во всех курсах анализа и проводится в предположении, что область (D) может быть разделена на конечное число таких более мелких областей, что параллели координатным осям, выбранным подходящим образом для каждой частичной области, пересекают границу частичной области не более чем в двух точках. В качестве более мелких областей можно взять кубы § 4. При этом для куба, лежащего целиком внутри (D) , формула (28) доказывается сразу без привлечения новых координат.

В частичной области, прилегающей к границе, выбираем такую систему координат, чтобы участок поверхности (S) пересекался прямыми, параллельными осям, не более одного раза. Тогда полная граница такой частичной области пересекается прямыми, параллельными осям координат, не более двух раз.

Ввиду произвольности функций U , V , W из (28) следуют:

$$\left. \begin{aligned} \int_{(D)} \frac{\partial U}{\partial x} d\tau &= \int_{(S)} U \cos(Nx) d\sigma, \\ \int_{(D)} \frac{\partial V}{\partial y} d\tau &= \int_{(S)} V \cos(Ny) d\sigma, \\ \int_{(D)} \frac{\partial W}{\partial z} d\tau &= \int_{(S)} W \cos(Nz) d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

З а м е ч а н и е. Нет необходимости предполагать $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$ непрерывными; достаточно, чтобы они были ограниченными и интегрируемыми. Так как мы не будем пользоваться этим обобщением, ограничимся указанием на возможность такого обобщения.

Перейдем к другой интегральной формуле — формуле Стокса.

Пусть на поверхности (S) заданы три функции φ , ψ , χ ; предполагаем их дифференцируемыми (в смысле § 3).

Рассмотрим на (S) некоторую часть (σ) , ограниченную контуром (l) .

Теорема 2. При перечисленных выше условиях имеет место формула

$$\int_{(\sigma)} [(\mathcal{D}_y \chi - \mathcal{D}_z \psi) \cos(Nx) + (\mathcal{D}_z \varphi - \mathcal{D}_x \chi) \cos(Ny) + \\ + (\mathcal{D}_x \psi - \mathcal{D}_y \varphi) \cos(Nz)] d\tau = \int_{(l)} \varphi dx + \psi dy + \chi dz, \quad (30)$$

причем контур обходится так, что наблюдатель, вытянувший тело в направлении N при обходе контура (l) , видит область (σ) слева. (Предполагается, что система координат правая.)

Допустим, что (σ) разбита на части, для каждой из которых формула (30) доказана. Тогда при сложении левых частей соответствующих формул получим интеграл по (σ) ; при сложении же правых частей криволинейные интегралы по вспомогательным контурам сократятся, так как по каждому участку вспомогательных контуров в сумме встретятся два интеграла, взятых в противоположных направлениях, и останется лишь интеграл по контуру (l) .

Поэтому формулу (30) достаточно доказать для части (S) , находящейся в одной из Q сфер § 4.

Предположение существования, например, $\mathcal{D}_y \varphi$ включает предположение о существовании функции, определённой в области, ограниченной (S) и частью сферы Ляпунова, и принимающей на (S) значение φ . Не вводя новых обозначений, эту функцию будем обозначать также через φ . Аналогичное соглашение сделаем для ψ и χ .

Тогда

$$\cos(Nx) \mathcal{D}_y \chi - \cos(Ny) \mathcal{D}_x \chi = \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right) \cos(Nx) - \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \cos(Ny),$$

и формула (30) принимает вид:

$$\int_{(\sigma)} \left\{ \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] \cos(Nx) + \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \right] \cos(Ny) + \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] \cos(Nz) \right\} d\sigma = \int_{(l)} \varphi dx + \psi dy + \chi dz. \quad (31)$$

Доказательство этой формулы для поверхности, имеющей непрерывные элементы кривизны, можно найти во всех курсах анализа. Её доказательство для поверхностей Ляпунова проводится с некоторыми предосторожностями.

Рассмотрим поле вектора с проекциями φ , ψ , χ в выбранной системе координат. При переходе к другой прямоугольной системе координат новые проекции вектора будут линейными комбинациями φ , ψ , χ . При этом переходе, как известно, подынтегральные выражения как правой, так и левой частей формулы (31) сохраняют свой вид, т. е. φ , ψ и χ заменятся лишь новыми проекциями поля, x , y , z заменятся новыми координатами. Поэтому для доказательства (31) достаточно установить справедливость её в какой-либо системе координат.

Не вводя новых обозначений, будем доказывать формулу (31), считая что φ , ψ и χ суть новые проекции вектора, а x , y , z — новые, надлежащим образом выбранные координаты.

Напомним, что если радиус d сферы Ляпунова удовлетворяет условию (4), то каждой сфере Ляпунова можно поставить в соответствие такие оси координат, что параллели каждой из осей пересекают часть (S) внутри сферы не более чем в одной точке.

Предположим, что для рассматриваемой сферы оси выбраны указанным образом. В этом случае уравнение поверхности будет иметь каждый из следующих трёх видов:

$$z = F(x, y), \quad x = F(y, z), \quad y = F(z, x). \quad (11')$$

Доказательство формулы (31) приводится к доказательству трёх тождеств:

$$\left. \begin{aligned} \int_{(\sigma)} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \cos(Ny) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cos(Nz) \right] d\sigma &= \int_{(i)} \varphi \, dx, \\ \int_{(\sigma)} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \cos(Nz) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \cos(Nx) \right] d\sigma &= \int_{(i)} \psi \, dy, \\ \int_{(\sigma)} \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right) \cos(Nx) - \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \cos(Ny) \right] d\sigma &= \int_{(i)} \chi \, dz. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Рассмотрим первое из трех уравнений (11')

$$z = F(x, y).$$

Доказательство первого из тождеств (32) получаем сразу; заметив, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos(Nx)}{\cos(Nz)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos(Ny)}{\cos(Nz)},$$

имеем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \cos(Ny) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \cos(Nz) = \\ & = - \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \right] \cos(Nz) = - \frac{\partial(\varphi)}{\partial y} \cos(Nz), \end{aligned}$$

обозначая через (φ) результат подстановки в $\varphi(x, y, z)$ вместо z функции $F(x, y)$.

Отсюда следует, что интеграл по (σ) равен

$$- \int_{(\sigma)} \frac{\partial(\varphi)}{\partial y} \cos(Nz) d\sigma = - \eta \int_{(\bar{\sigma})} \frac{\partial(\varphi)}{\partial y} dx dy \quad (\eta = \pm 1),$$

где $\eta = 1$, если $\cos(Nz) > 0$, и $\eta = -1$, если $\cos(Nz) = -1$; $(\bar{\sigma})$ означает проекцию σ на плоскость xy . Между тем имеем:

$$- \eta \int_{(\bar{\sigma})} \frac{\partial(\varphi)}{\partial y} dx dy = \eta \int_{(l)} \varphi dx,$$

где интеграл по (\bar{l}) берётся в таком направлении, что наблюдатель, вытянувшийся в направлении оси Oz , при обходе видит область (σ) слева. Если $\cos(Nz) > 0$, то $\eta = 1$ и наблюдатель, расположенный на (S) в направлении нормали к (σ) , видит интегрирование в направлении, при котором (σ) остаётся слева; в этом случае формула не требует изменения. Если $\cos(Nz) < 0$, $\eta = -1$ и наблюдатель видит интегрирование в направлении, при котором область (σ) остаётся справа; в этом случае необходимо изменить направление интегрирования по (\bar{l}) , г. е. изменить знак интеграла, подставляя (l) вместо (\bar{l}) (рис. 7).

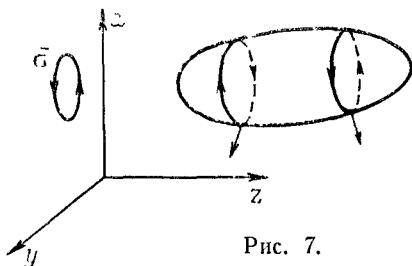


Рис. 7.

Если взять для уравнения поверхности второе или третье из уравнений (11'), те же рассуждения приведут ко второму или третьему из тождеств (32).

Отсюда следует, что формула (31), и как следствие формула (30), доказаны.

§ 6. Замечание об интегрировании неограниченных функций

В этом параграфе дается определение интеграла от неограниченной функции по конечной трехмерной области или поверхности.

Для определенности остановимся на случае трехмерной области (D) . Пусть (Σ) поверхность, точки которой лежат внутри или на границе области (D) , и такая, что функция $F(x, y, z) = F(m)$ непрерывна в каждой точке области, не принадлежащей (Σ) , и может быть неограниченна в окрестности каждой точки (Σ) . Пусть (ω) есть какая-либо область, содержащая внутри себя (Σ) и такая, что каждая точка области (ω) от (Σ) находится на расстоянии, не превышающем некоторого числа $\delta > 0$. В области $(D - \omega)$, состоящей из точек области (D) , не принадлежащих (ω) , функция $F(m)$ непрерывна и ограничена и поэтому существует интеграл

$$\int_{(D-\omega)} F(m) d\tau. \quad (33)$$

Будем говорить, что интеграл (33) стремится к пределу a при $\delta \rightarrow 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что

$$\left| \int_{(D-\omega)} F(m) d\tau - a \right| < \varepsilon,$$

как только область (ω) содержит внутри себя (Σ) и каждая точка (ω) находится от (Σ) на расстоянии, не превышающем δ .

Если интеграл (33) имеет конечный предел при $\delta \rightarrow 0$, то этот предел называют интегралом функции $F(m)$ по области (D) и обозначают

$$\int_{(D)} F(m) d\tau, \quad (34)$$

а интеграл (34) называют сходящимся.

Так как в последующем мы будем иметь главным образом дело с интегралами от функций, неограниченных в окрестности отдельной изолированной точки m_0 , то последующие рассуждения будем проводить именно для таких функций, хотя все результаты очевидным образом легко переносятся на общий случай наличия особых точек, заполняющих поверхность (Σ).

Пусть $(D(\delta_1, \delta_2))$ есть часть области (D) , содержащаяся в шаровом слое с центром в m_0 и радиусами δ_1 и δ_2 ($0 < \delta_2 < \delta_1$).

Теорема. Если интеграл

$$\int_{(D(\delta_1, \delta_2))} |F| d\tau$$

бесконечно мал при $\delta_1 \rightarrow 0$, то интеграл (34) сходится.

Действительно, пусть (ω) и (ω') две какие-либо области, содержащиеся в шаре радиуса δ_1 и содержащие шар радиуса δ_2 , ($\delta_2 < \delta_1$). Тогда области $(D - \omega)$ и $(D - \omega')$ не содержат части (D) внутри шара радиуса δ_2 и имеют общую часть, содержащую часть (D) вне шара радиуса δ_1 .

Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int_{(D-\omega)} F d\tau - \int_{(D-\omega')} F d\tau \right| &= \left| \int_{(D(\delta_1, \delta_2)-\omega)} F d\tau - \int_{(D(\delta_1, \delta_2)-\omega')} F d\tau \right| < \\ &< \left| \int_{(D(\delta_1, \delta_2)-\omega)} F d\tau \right| + \left| \int_{(D(\delta_1, \delta_2)-\omega')} F d\tau \right| < \\ &< \int_{(D(\delta_1, \delta_2)-\omega)} |F| d\tau + \int_{(D(\delta_1, \delta_2)-\omega')} |F| d\tau < 2 \int_{(D(\delta_1, \delta_2))} |F| d\tau, \end{aligned}$$

т. е. разность

$$\int_{(D-\omega)} F d\tau - \int_{(D-\omega')} F d\tau$$

бесконечно мала вместе с δ_1 , что по признаку Коши обеспечивает существование предела (33) при $\delta_1 \rightarrow 0$.

Если интеграл

$$\int_{(D)} |F| d\tau$$

сходится, то говорят, что интеграл (34) абсолютно сходится. Из доказанной теоремы сразу следует, что из абсолютной сходимости интеграла вытекает сходимость интеграла. Не останавливаясь на доказательстве, заметим, что из сходимости интеграла в нашем определении следует абсолютная сходимость.

Аналогично определяется интеграл

$$\int_{(S)} F d\sigma,$$

взятый по поверхности от функции F , которая непрерывна во всех точках поверхности за исключением точки m_0 (рис. 8).

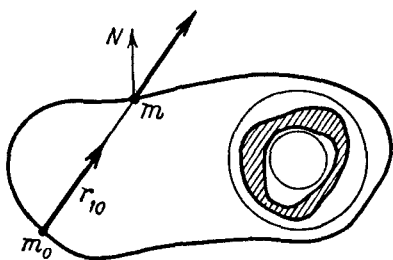


Рис. 8.

Вместо шаров, которые вводились при рассмотрении интегралов по (D) , будем брать части (S) , вырезанные круговыми цилиндрами, имеющими нормаль в точке m_0 своей осью.

Пример. Предположим, что m_0 — фиксированная

точка поверхности (S) , m — переменная точка этой поверхности, r_{10} — расстояние между m и m_0 . Будем считать r_{10} направленным из m_0 в m . Пусть N есть нормаль к (S) в точке m , а $(r_{10}N)$ есть угол между направлениями r_{10} и N (рис. 8). Пусть μ ограниченная интегрируемая функция точки m .

Образует интеграл

$$\int_{(S)} \mu \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma. \quad (35)$$

Интеграл (35), рассматриваемый как функция точки m_0 , лежащей или не лежащей на (S) , называется потенциалом двойного слоя, а функция μ — плотностью слоя.

Подинтегральная функция в (35) становится бесконечной, когда точка m стремится к точке m_0 на (S) . Докажем, что интеграл (35) сходится. Пусть (σ_1) и (σ_2) означают части (S) , лежащие внутри сферы Ляпунова с центром в m_0 и вырезанные круговыми цилиндрами радиусов δ_1 и δ_2 ($\delta_2 < \delta_1$), имею-

щими осью нормаль в точке m_0 . На основании доказанной теоремы, для сходимости интеграла (35) достаточно показать, что интеграл

$$\int_{(\sigma_1 - \sigma_2)} |\mu| \frac{|\cos(r_{10}N)|}{r_{10}^2} d\sigma \quad (36)$$

бесконечно мал вместе с δ_1 (рис. 9).

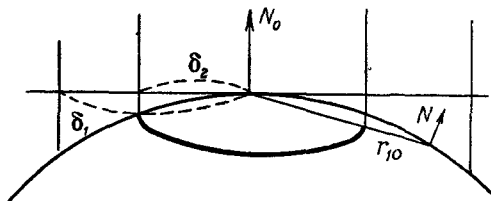


Рис. 9.

Действительно, на основании оценки (17) § 1 имеем:

$$|\cos(r_{10}N)| < Er_{10}^\lambda.$$

Обозначая через A верхнюю границу значений $|\mu|$ на (S) и используя оценки (16) и (12) § 1, получим:

$$\begin{aligned} \int_{(\sigma_1 - \sigma_2)} |\mu| \frac{|\cos(r_{10}N)|}{r_{10}^2} d\sigma &< A \cdot 2E \int_{(\sigma_1^{(0)} - \sigma_2^{(0)})} \frac{r_{10}^\lambda}{r_{10}^2} d\sigma^{(0)} < \\ &< 2EA \int_{(\sigma_1^{(0)} - \sigma_2^{(0)})} \frac{d\sigma^{(0)}}{r_{10}^{2-\lambda}} < 2EA \int_0^{2\pi} \int_{\delta_2}^{\delta_1} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho^{2-\lambda}} = \\ &= 4\pi EA \frac{\delta_1^\lambda - \delta_2^\lambda}{\lambda} < \frac{4\pi E}{\lambda} A\delta_1^\lambda, \end{aligned}$$

т. е.

$$\int_{(\sigma_1 - \sigma_2)} |\mu| \frac{|\cos(r_{10}N)|}{r_{10}^2} d\sigma < cA\delta_1^\lambda, \quad (37)$$

откуда следует

$$\int_{(\sigma)} |\mu| \frac{|\cos(r_{10}N)|}{r_{10}^2} d\sigma < cA\delta_1^\lambda, \quad (38)$$

где (σ) есть часть (S) , вырезанная цилиндром радиуса δ . Во второй главе будем часто пользоваться оценкой (38).

Замечание. Из предыдущих рассуждений следует, что

$$\left| \int_{(S)} \mu \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma \right| < aA,$$

где A верхняя граница для $|\mu|$. Отсюда следует, что если μ_n стремится равномерно к пределу μ , то имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(S)} \mu_n \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma = \int_{(S)} \mu \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma. \quad (39)$$

В самом деле, выбрав n_0 надлежащим образом, получим для $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \left| \int_{(S)} \mu_n \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma - \int_{(S)} \mu \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma \right| &= \\ &= \left| \int_{(S)} (\mu_n - \mu) \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma \right| < a\epsilon. \end{aligned}$$

Замечание о перестановке порядка интегрирования

Пусть (D) конечная область пространства, а (S) поверхность, имеющая конечную площадь. Точки области (D) будем обозначать через m_1 , точки поверхности (S) через m_2 . Допустим, что функция $F(1, 2)$ точек m_1 и m_2 такова, что для каждого фиксированного положения точки m_2 функция $F(m_1, m_2)$ как функция точки m_1 непрерывна в (D) за исключением точек некоторой поверхности (линии, изолированных точек), зависящей от выбора m_2 . Интеграл

$$\int_{(D)} F(1, 2) d\tau,$$

если он существует, является функцией точки m_2 , может быть, неограниченной. Может случиться, что эта функция интегрируема по (S) , и тогда имеет смысл интеграл

$$\int_{(S)} \left[\int_{(D)} F(m_1, m_2) d\tau_1 \right] d\sigma_2. \quad (40)$$

Допустим, что функция $F(m_1, m_2)$ для каждого фиксированного положения точки m_1 из (D) непрерывна как функция точки m_2 на (S) , за исключением точек некоторой линии (изолированных точек), зависящей от выбора m_1 . Интеграл по (S) от $F(m_1, m_2)$, если

он существует, является функцией точки m_1 и может случиться, что существует также интеграл

$$\int_{(D)} \left[\int_{(S)} F(n_1, m_2) d\sigma_2 \right] d\tau_1. \quad (41)$$

Интегралы (40) и (41) могут оказаться равными. Но может случиться, что один из интегралов имеет смысл, другой не имеет; либо оба имеют смысл, но разные значения.

Теория кратных интегралов Лебега позволяет дать следующее достаточное условие равенства интегралов (40) и (41).

Если существует один из интегралов

$$\int_{(S)} \left[\int_{(D)} |F(1, 2)| d\tau_1 \right] d\sigma_2 \quad (40')$$

или

$$\int_{(D)} \left[\int_{(S)} |F(1, 2)| d\sigma_2 \right] d\tau_1, \quad (41')$$

то существует и другой и, кроме того, существуют интегралы (40) и (41) и они равны между собой.

Аналогичная теорема имеет место, если оба интеграла берутся по поверхности, или оба по объему.

Если возьмем функцию $F(0, 1, 2)$ точек m_0, m_1, m_2 , пробегающих, например, поверхность (S) , и рассмотрим интеграл

$$\int_{(S_2)} \left\{ \int_{(S_1)} \left[\int_{(S)} F(0, 1, 2) d\sigma \right] d\sigma_1 \right\} d\sigma_2,$$

то он существует и равен любому интегралу, полученному перестановкой порядка интегрирований, если существует либо интеграл

$$\int_{(S_2)} \left\{ \int_{(S_1)} \left[\int_{(S)} |F(0, 1, 2)| d\sigma \right] d\sigma_1 \right\} d\sigma_2,$$

либо хотя бы один из интегралов, полученных из последнего перестановкой порядка интегрирования.

Пусть функция $F(1, 2)$ непрерывна, если m_1 и m_2 не совпадают, и удовлетворяет неравенству

$$|F(1, 2)| < \frac{C}{r^\alpha},$$

где C — некоторая постоянная, r — расстояние между точками m_1 и m_2 и α — постоянная, $0 < \alpha < 3$. Говорят, что $F(1, 2)$ обладает полярной особенностью. Для таких функций равенство интегралов (40) и (41) доказывается сравнительно просто без привлечения теории интеграла Лебега. (См. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, изд. 2-е, 1951 г., стр. 66—68). Нам в дальнейшем придется иметь дело почти исключительно с неограниченными функциями, обладающими полярными особенностями.

Если функция $F(1, 2)$ точек m_1 и m_2 поверхности (S) обладает полярной особенностью, то для равенства интегралов

$$\int_{(S_1)} \left[\int_{(S_2)} F(1, 2) d\sigma_2 \right] d\sigma_1 \quad \text{и} \quad \int_{(S_2)} \left[\int_{(S_1)} F(1, 2) d\sigma_1 \right] d\sigma_2$$

достаточно, чтобы было $\alpha < 2$.

§ 7. О гармонических функциях

Дадим следующие определения:

а) Функция V называется гармонической в области (D) , не содержащей бесконечно удаленной точки, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1°. Она определена в (D) и имеет внутри (D) равномерно непрерывные первые производные.

2°. Она имеет внутри (D) вторые производные, непрерывные во всякой области (D_1) , лежащей вместе с границей внутри (D) .

3°. Вторые производные функции во всякой внутренней точке области (D) удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (42)$$

а') Функция V называется гармонической внутри (D) , если она гармоническая во всякой области (D_1) , лежащей вместе с границей внутри (D) , и если она равномерно непрерывна в (D) .

Мы увидим впоследствии, что функция

$$\int_{(S)} \frac{\mu d\sigma}{r_{10}},$$

где μ правильно непрерывная на (S) , есть функция гармоническая в (D) ; в то же время функция (35) при тех же предположениях о плотности μ является, вообще говоря, лишь функцией гармонической внутри (D) .

б) Функция V называется гармонической в области (D_e) , внешней к (D) , и содержащей бесконечно удаленную точку, если она удовлетворяет следующим четырем условиям:

1°. Она определена в (D_e) , и ее первые производные равномерно непрерывны внутри (D_e) .

2°. Ее вторые производные непрерывны во всякой области (D'_e) , лежащей вместе с границей внутри (D'_e) .

3°. Вторые производные V во всякой внутренней точке области (D_e) удовлетворяют уравнению Лапласа.

4°. Если R есть расстояние точки области (D_e) до некоторой фиксированной точки, то¹

$$|RV| < A, \quad \left| R^2 \frac{\partial V}{\partial x} \right| < A, \quad \left| R^2 \frac{\partial V}{\partial y} \right| < A, \quad \left| R^2 \frac{\partial V}{\partial z} \right| < A,$$

где A — определенное число.

б') Функция называется гармонической внутри (D_e) , если она гармоническая во всякой области (D'_e) , содержащей бесконечно удаленную точку и содержащейся в (D_e) , и если она равномерно непрерывна в (D_e) .

Из данных определений следует, что постоянная $C \neq 0$ есть гармоническая функция в (D_i) и не является гармонической функцией в (D_e) .

В последующем всегда будем через (D_i) обозначать области, не содержащие бесконечно удаленную точку, и через (D_e) области, которые дополняют (D_i) до полного пространства.

Заметим, что мы не исключим ни областей (D_i) , имеющих внутренние границы (рис. 10), ни областей (D_e) , ограниченных несколькими поверхностями (рис. 11).

Согласимся нормаль к границе области (D_i) всегда считать направленной внутрь соответствующей области (D_e) .

Область (D_e) , соответствующая области (D_i) (рис. 10), несвязна; так же несвязна область (D_i) , соответствующая области (D_e) (рис. 11).

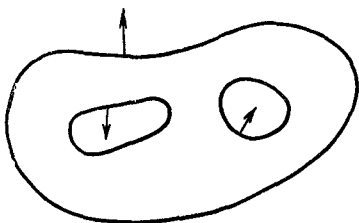


Рис. 10.



Рис. 11.

¹ Результаты гл. IV позволяют заключить, что для всякой функции, удовлетворяющей условиям 1°, 2°, 3° и стремящейся к нулю при $R \rightarrow \infty$, удовлетворяются неравенства условия 4°. Поэтому можно было бы условие 4° заменить таким: $V \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$.

§ 8. Тождества Грина

Предположим, что в области (D_i) даны две гармонические функции U и V ; образуем интеграл

$$I = \int_{(D_i)} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\tau,$$

который короче будем записывать в виде

$$\int_{(D_i)} \sum \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} d\tau.$$

Преобразуя его с помощью формулы Остроградского, получим:

$$\begin{aligned} I &= \int_{(D_i)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(U \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(U \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(U \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] d\tau - \\ &\quad - \int_{(D_i)} U \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) d\tau = \\ &= \int_{(D_i)} \left[\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right] d\tau = \\ &= \int_{(\bar{S})} U \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(Nx) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(Ny) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(Nz) \right] d\sigma = \int_{(\bar{S})} U \frac{dV_i}{dn} d\sigma. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Если граница состоит из нескольких поверхностей, интеграл

$$\int_{(\bar{S})} U \frac{dV_i}{dn} d\sigma$$

обозначает сумму интегралов, распространенных по этим поверхностям.

Мы снабдили нормальные производные $\frac{dV}{dn}$ индексом i для того, чтобы указать, что мы при вычислении производной приближаемся к границе изнутри (D_i) .

Мы проделали вычисления с функцией U ; повторяя эти вычисления с функцией V , получим:

$$I = \int_{(\bar{S})} V \frac{dU_i}{dn} d\sigma.$$

Таким образом, имеем

$$\int_{(D_i)} \sum \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} d\tau = \int_{(S)} U \frac{dV_i}{dn} d\sigma = \int_{(\bar{S})} V \frac{dU_i}{dn} d\sigma \quad (43).$$

и

$$\int_{(\bar{S})} \left(U \frac{dV_i}{dn} - V \frac{dU_i}{dn} \right) d\sigma = 0. \quad (44)$$

Формулы (43) и (44) называются тождествами Грина для функций, гармонических в (D_i) . Так как $V \equiv 1$ является гармонической в (D_i) , то из (44) следует

$$\int_{(\bar{S})} \frac{dU_i}{dn} d\sigma = 0, \quad (45)$$

т. е. интеграл по границе от нормальной производной функции гармонической в (D_i) равен нулю.

Прежде чем переходить к выводу аналогичных формул для функций, гармонических в (D_e) , определим интеграл по бесконечной области.

Пусть (D) бесконечная область. Последовательность конечных областей $\{(D_n)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) назовем исчерпывающей область (D) , если (D_n) содержится в (D_{n+1}) , и если каждая точка области (D) содержится хотя бы в одной из областей последовательности.

Пусть F непрерывна в (D) . Образует интеграл

$$\int_{(D_n)} F d\tau.$$

Предел при $n \rightarrow \infty$ этого интеграла, если он существует и не зависит от выбора исчерпывающей последовательности областей, называют интегралом функции F по (D) и обозначают

$$\int_{(D)} F d\tau.$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_{(D'_e)} \sum \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} d\tau,$$

где U и V гармонические в (D_e) . Не приводя доказательства заметим, что оценки производных для U и V из четвертого условия для гармонических функций обеспечивают существование рассматриваемого интеграла.

Для функций гармонических в (D_e) тождества Грина имеют вид:

$$\int_{(D'_e)} \sum \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} d\tau = - \int_{(S)} U \frac{dV_e}{dn} d\sigma = - \int_{(S)} V \frac{dU_e}{dn} d\sigma, \quad (43')$$

$$\int_{(S)} \left(U \frac{dV_e}{dn} - V \frac{dU_e}{dn} \right) d\sigma = 0. \quad (44')$$

Действительно, рассмотрим сферу (Σ) с центром в некоторой фиксированной точке и настолько большого радиуса R , чтобы вся граница области (D_e) была внутри (Σ) . Применим формулу (43) к части (D'_e) области (D_e) , ограниченной (Σ) . Заметим, что, применяя эту формулу, мы должны изменить направление нормали к (S) , так как на этот раз (D_i) есть часть внешней области по отношению к рассматриваемой области (D'_e) .

Считая направление нормали для всех формул взятым по прежнему соглашению, получим:

$$\int_{(D'_e)} \sum \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} d\tau = - \int_{(S)} U \frac{dV_e}{dn} d\sigma + \int_{(\Sigma)} U \frac{dV}{dn} d\sigma. \quad (46)$$

Последний интеграл стремится к нулю, когда R стремится к бесконечности. В самом деле, функции U и V , как определенные в D_e , удовлетворяют четвертому условию, следовательно

$$\begin{aligned} |U| &< \frac{A}{R}, \\ \left| \frac{\partial V}{\partial x} \cos(Nx) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(Ny) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(Nz) \right| &< \\ &< \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2} < \frac{\sqrt{3} A}{R^2}. \end{aligned}$$

Взяв сферические координаты

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta, \\ (0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi),$$

имеем:

$$d\sigma = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

и

$$\left| \int_{(A)} U \frac{dV}{dn} d\sigma \right| \leq \frac{\sqrt{3} A^2}{R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\sqrt{3} A^2 \cdot 4\pi}{R} \rightarrow 0.$$

Кроме того, как было отмечено выше, интеграл в левой части (43') существует и является, в частности, пределом при $R \rightarrow \infty$ интеграла в левой части (46). Поэтому при $R \rightarrow \infty$ из (46) следует формула (43'), а с нею и (44').

Пусть точка $m_0(x, y, z)$ фиксирована. Ее расстояние до переменной точки $m_1(\xi, \eta, \zeta)$ обозначим через r_{10} . Будем считать r_{10} направленным из m_0 в m_1 . Положим

$$U(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{r_{10}} = \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}}. \quad (47)$$

Функция U непрерывна и имеет непрерывные производные всех порядков во всякой области, не содержащей точки m_0 внутри или на границе. Непосредственной проверкой убеждаемся, что имеет место

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = 0,$$

т. е. U есть гармоническая функция во всякой конечной области, не содержащей m_0 внутри или на границе. То же можно сказать и о бесконечной области, так как очевидно, что функция U удовлетворяет и четвертому условию.

Пусть N единичный вектор. Производную U в направлении N будем обозначать $\frac{dU}{dn}$. Имея в виду применение к U формул (44) и (44'), вычислим предварительно $\frac{dU}{dn}$.

Имеем, учитывая, что

$$\begin{aligned} \cos(r_{10}x) &= \frac{\xi - x}{r_{10}}, \quad \cos(r_{10}y) = \frac{\eta - y}{r_{10}}, \quad \cos(r_{10}z) = \frac{\zeta - z}{r_{10}}, \\ \frac{dU}{dn} &= \frac{\partial U}{\partial \xi} \cos(Nx) + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cos(Ny) + \frac{\partial U}{\partial \zeta} \cos(Nz) = \\ &= -\frac{1}{r_{10}^2} \left[\frac{\xi - x}{r_{10}} \cos(Nx) + \frac{\eta - y}{r_{10}} \cos(Ny) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\zeta - z}{r_{10}} \cos(Nz) \right] = -\frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2}. \end{aligned} \quad (48)$$

Обратимся к (44). Пусть V гармоническая в (D_i) . Предположим сначала, что $m_0(x, y, z)$ внутри (D_e) . В этом случае U является гармонической в (D_i) и применима формула (44). Учитывая (47) и (48), получим:

$$\int_{(\dot{S})} \frac{dV_i}{dn} \frac{d\sigma}{r_{10}} + \int_{(\dot{S})} V \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma = 0. \quad (49)$$

Предположим теперь, что $m_0(x, y, z)$ внутри (D_i) . Тогда U не непрерывна в (D_i) и формула (44) не применима.

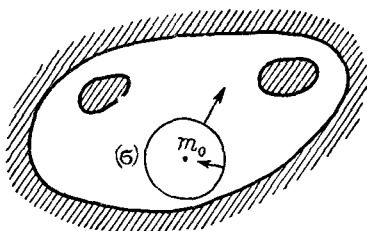


Рис. 12.

Пусть (σ) есть сфера с центром в m_0 и настолько малого радиуса ρ , что ни внутри ни на сфере (σ) нет точек (S) (рис. 12).

Тогда функция U гармоническая во всякой области, лежащей вне сферы (σ) , и тем самым, в части (D_i) вне сферы (σ) .

Применяя к этой части (D_i) формулу (44), получим:

$$\int_{(S)} \frac{dV_i}{dn} \frac{d\sigma}{r_{10}} + \int_{(S)} V \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma - \\ - \int_{(\sigma)} \frac{dV}{dn} \frac{d\sigma}{r_{10}} - \int_{(\sigma)} V \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma = 0. \quad (50)$$

Мы изменили знак перед интегралами по (σ) , так как, применяя формулу (44), необходимо нормаль к (σ) направить внутрь (σ) , в то время как в формуле (50) мы ее считаем направленной во вне сферы, т. е. внутрь (D_i) .

Вычислим интегралы по σ . Сначала имеем:

$$\left| \int_{(\sigma)} \frac{dV_i}{dn} \frac{d\sigma}{r_{10}} \right| \leq \sqrt{3} A \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{\rho} = 4\pi \sqrt{3} A \rho \rightarrow 0, \quad (\rho \rightarrow 0),$$

где A — верхняя граница модуль первых производных V в (D_i) .

Если V_0 есть значение V в центре сферы, то имеем:

$$|V - V_0| < \sqrt{3} A \rho.$$

Отсюда следует

$$\left| \int_{(\sigma)} (V - V_0) \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma \right| < \\ < \sqrt{3} A \rho \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{\rho^2} = 4\pi \sqrt{3} A \rho \rightarrow 0, \quad (\rho \rightarrow 0).$$

Поэтому

$$\int_{(\sigma)} V \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma = V_0 \int_{(\sigma)} \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma + \\ + \int_{(\sigma)} (V - V_0) \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma \rightarrow 4\pi V_0, \quad (\rho \rightarrow 0).$$

Следовательно, если m в (D_i) , то

$$V_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{dV_i}{dn} \frac{d\sigma}{r_{10}} + \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} V \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma. \quad (51)$$

Формулы (49) и (51) можно распространить на функции, определенные в области (D_e) .

Если m_0 внутри (D_e) , U непрерывна в (D_e) и применение формулы (44') сразу дает:

$$\int_{(\dot{S})} \frac{dV_e}{dn} \frac{d\sigma}{r_{10}} + \int_{(\dot{S})} V_e \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma = 0. \quad (51')$$

Предположим теперь, что m_0 внутри (D_e) . Рассмотрим сферу (Σ) радиуса R с центром в m_0 , окружающую все границы (D_e) , и применим формулу (51) к области, ограниченной границами (D_e) и (Σ) .

Получим:

$$V = -\frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{S})} \frac{dV_e}{dn} \frac{d\sigma}{r_{10}} + \frac{1}{4\pi} \int_{(\Sigma)} \frac{dV_e}{dn} \frac{d\sigma}{r_{10}} - \\ - \frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{S})} V_e \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{(\Sigma)} V \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma. \quad (52)$$

Мы изменили знаки перед интегралами по (S) , так как, применяя формулу (51) к рассматриваемой области, необходимо направлять нормаль внутрь области (D_e) , в то время как мы сохраняем ее направление внутрь (D_e) .

Между тем, в силу условия 4°,

$$\left| \int_{(\Sigma)} \frac{dV_e}{dn} \frac{d\sigma}{r_{10}} \right| < \frac{\sqrt{3}A}{R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{R} = \frac{4\pi\sqrt{3}A}{R} \rightarrow 0, \\ \left| \int_{(\Sigma)} V \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma \right| < \frac{A}{R} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{R^2} = \frac{4\pi A}{R} \rightarrow 0. \quad \left. \vphantom{\int_{(\Sigma)}} \right\} (R \rightarrow \infty,$$

Отсюда следует, что интегралы по (Σ) имеют пределы нуль при $R \rightarrow \infty$.

Соберем различные формулы, полученные в этом параграфе: если m внутри (D_e) , то

$$\int_{(\dot{S})} \frac{dV_i}{dn} \frac{d\sigma}{r_{10}} + \int_{(\dot{S})} V_i \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma = 0; \quad (49)$$

если m внутри (D_i) , то

$$V = \frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{S})} \frac{dV_i}{dn} \frac{d\sigma}{r_{10}} + \frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{S})} V_i \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma; \quad (51)$$

если m в (D_e) , то

$$V = -\frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{S})} \frac{dV_e}{dn} \frac{d\sigma}{r_{10}} - \frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{S})} V_e \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma; \quad (49')$$

если m в (D_i) , то

$$\int_{(\dot{S})} \frac{dV_e}{dn} \frac{d\sigma}{r_{10}} + \int_{(\dot{S})} V_e \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma = 0. \quad (51')$$

Применим, наконец, последние формулы к доказательству теоремы об одном важном свойстве гармонических функций.

Теорема. Функция, гармоническая в какой-либо области, не может достигать максимума или минимума во внутренней точке области.

Мы докажем теорему для максимума функции; это не ограничивает общности, так как в точке, где функция U имеет минимум, функция $-U$ имеет максимум.

Предположим, что функция имеет максимум в точке m_0 , расположенной внутри рассматриваемой области. Мы не исключаем случая, когда m_0 остается постоянной в некоторой области, содержащей m_0 ; в этом случае мы предположим, что m_0 находится на границе этой области.

Пусть (σ) сфера с центром в m_0 и настолько малого радиуса ρ , что сама сфера и ее внутренние точки лежат в рассматриваемой области.

Применяя формулу (51) к функции U и сфере (σ) , получим:

$$\begin{aligned} U_{m_0} &= \frac{1}{4\pi} \int_{(\sigma)} U \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{(\sigma)} \frac{dU_i}{dn} \frac{d\sigma}{r_{10}} = \\ &= \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{(\sigma)} U d\sigma + \frac{1}{4\pi\rho} \int_{(\sigma)} \frac{dU_i}{dn} d\sigma, \end{aligned} \quad (51'')$$

так как для точек (σ) имеем:

$$r_{10} = \rho, \quad \cos(r_{10}N) = 1.$$

На основании (45) второй интеграл в (51'') равен нулю и находим:

$$U_m = \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{(\sigma)} U d\tau. \quad (53)$$

Если мы положим

$$U = U_{m_0} - \sigma,$$

то α непрерывная неотрицательная функция. Равенство (53) дает

$$U_{m_0} = U_{m_0} - \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{(\sigma)} \sigma d\tau \quad \text{или} \quad \int_{(\sigma)} \alpha d\sigma = 0,$$

что возможно лишь, если $\alpha \equiv 0$ на сфере (σ) . Ввиду произвольности ρ отсюда следует, что $\sigma \equiv 0$ внутри сферы, а это невозможно, так как по предположению точка m_0 может лежать лишь на границе области, где U постоянна.

Таким образом, абсурдно предположение о достижении максимума функцией U во внутренней точке области; теорема доказана.

Следствие. Функция, гармоническая внутри (D_i) , достигает своего максимума и минимума на границе этой области.

Действительно, функция, гармоническая в (D_i) , непрерывна в области, включая границу (S) , и, следовательно, достигает максимума и минимума в некоторых точках области или границы. По доказанной теореме эти точки могут быть лишь на границе.

Для функций, гармонических в (D_e) , верно то же утверждение, если бесконечно удаленную точку причислить к точкам границы.

Указанное свойство гармонических функций называется принципом максимума гармонических функций.

В заключение рассмотрим так называемые теоремы о среднем для гармонических функций, вытекающие из (53).

В этих теоремах будем считать, что шар (ω) и его граница (σ) лежат в области, где функция U гармоническая.

Теорема 1. *Значение гармонической функции в центре сферы равно среднему ее значению по поверхности сферы.*

Эта теорема следует из формул (53), так как $4\pi\rho^2$ есть площадь сферы.

Теорема 2. *Значение гармонической функции в центре шара равно среднему ее значению по шару.*

Действительно, пусть R радиус шара (ω). Умножая (53) на $4\pi r^2 dr$ и интегрируя по r от 0 до R , получим после деления на $\frac{4\pi R^3}{3} = \omega$:

$$U_{m0} = \frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} U d\tau.$$

§ 9. Интеграл Гаусса

Мы указывали в § 7, что функция

$$V \equiv 1$$

гармоническая в (D_i) . Положим в (49) и (51) $V=1$, тогда

$$\int_{(S)} \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma = 0, \quad \text{если } m \text{ в } (D_e), \quad (54)$$

$$\int_{(S)} \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma = 4\pi, \quad \text{если } m \text{ в } (D_i). \quad (54')$$

Интеграл

$$W = \int_{(S)} \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma \quad (55)$$

называется интегралом Гаусса. В § 6 было показано, что интеграл Гаусса сходится, когда точка m находится на границе. Сейчас будем искать значение интеграла Гаусса в этом случае, предполагая, что (S) есть поверхность Ляпунова. Предположим, что точка m на границе. Пусть (Σ) сфера радиуса ρ с центром в m . Предположим, что (Σ) вырезает часть (σ) поверхности (S) , и обозначим через W_σ интеграл Гаусса, взятый по части (S) вне (σ) :

$$W_\sigma = \int_{(\Sigma-\sigma)} \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma.$$

По определению имеем:

$$W = \lim W_\sigma \quad (\rho \rightarrow 0).$$

Обозначим через (Σ_1) часть сферы (Σ) внутри (D_i) и через (Σ_2) часть в (D_e) . Интеграл (55), взятый по $(S - \sigma)$ и (Σ_1) , равен нулю, так как точка m лежит вне области, ограниченной $(S - \sigma)$ и (Σ_1) :

$$W_\sigma - \int_{(\Sigma_1)} \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma = 0. \quad (56)$$

Мы взяли знак минус перед интегралом в последней формуле, так как мы предполагаем, что N есть внешняя нормаль к (Σ) ; в то же время, применяя формулу (54), мы должны были бы N направлять внутрь сферы (Σ) (рис. 13).

Интеграл (55), взятый по $(S - \sigma)$ и (Σ_2) , равен 4π , так как на этот раз точка m внутри области, ограниченной $(S - \sigma)$ и (Σ_2) ; следовательно,

$$W_\sigma + \int_{(\Sigma_2)} \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma = 4\pi. \quad (56')$$

Складывая (56) и (56'), находим:

$$W_\sigma = 2\pi + \frac{1}{2} \left\{ \int_{(\Sigma_1)} \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma - \int_{(\Sigma_2)} \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma \right\}. \quad (57)$$

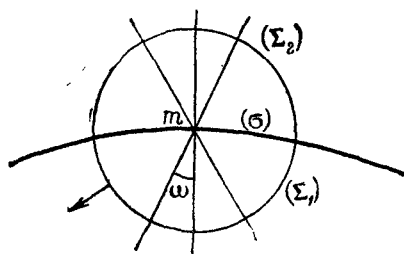


Рис. 13.

Докажем теперь, что фигурная скобка в формуле (57) бесконечно мала вместе с ρ .

Рассмотрим конус (2ω) , отвечающий точке m . Заметим, что интегралы по частям (Σ_1) и (Σ_2) , лежащим внутри конуса, взаимно уничтожаются.

Отсюда следует, что фигурная скобка по абсолютному значению меньше интеграла

$$\int \frac{|\cos(r_{10}N)|}{r_{10}^2} d\sigma, \quad (58)$$

распространенного на часть сферы вне конуса. Вводя сферические координаты, мы увидим, что этот интеграл равен:

$$\int_0^{2\pi} \int_{\omega}^{\pi-\omega} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = -2\pi [\cos \theta]_{\omega}^{\pi-\omega} = 4\pi \cos \omega.$$

Так как можно положить

$$\cos \omega = \frac{E_0 \lambda}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} E_0^4 \rho^4}},$$

то очевидно, что предел $\cos \omega$ равен нулю при $\rho \rightarrow 0$.

Поэтому

$$W = \lim W_{\sigma} = 2\pi. \quad (59)$$

Собирая установленные формулы, имеем:

$$\left. \begin{aligned} W &= 4\pi, & \text{если } m & \text{ внутри } (D_i), \\ W &= 2\pi, & \text{если } m & \text{ на границе } (D_i), \\ W &= 0, & \text{если } m & \text{ вне } (D_i). \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Замежим, что для получения формул (60) мы не предполагали область (D_i) ограниченной единственной поверхностью.

Небесполезно непосредственно проверить, что формулы (60) верны в более общих случаях.

Возьмем сначала случай рис. 11. Если $(S_1), (S_2), \dots, (S_k)$ суть границы связанных отделенных друг от друга областей, то имеем по сделанному выше соглашению:

$$\int_{(S)} \frac{\cos(r_{10}) N}{r_{10}^2} d\sigma = \sum_{i=1}^k \int_{(S_i)} \frac{\cos(r_{10}) N}{r_{10}^2} d\sigma.$$

Если m внутри (D_c) , то каждый из интегралов правой части равен нулю. Если m в области, ограниченной (S_i) , то точка m вне областей, ограниченных поверхностями $(S_1), \dots, (S_{i-1}), (S_{i+1}), \dots, (S_k)$, и все интегралы правой части равны нулю, за исключением интеграла по (S_i) , который равен 4π . Если предположить, что m на (S_i) , то приходим к аналогичному заключению.

Обозначим, в случае рис. 10, через (S_0) внешнюю поверхность и через $(S_1), \dots, (S_k)$ внутренние поверхности. Имеем

в этом случае:

$$\int_{(S)} \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma = \int_{(S_0)} \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma + \sum_{i=1}^k \int_{(S_i)} \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma. \quad (61)$$

Если m в части (D_e) , которая содержит бесконечно удаленную точку, все интегралы правой части равны нулю; если m на (S_0) или внутри (D_i) , то первый интеграл равен 2π или 4π , а остальные интегралы равны нулю. Если m на (S_i) или внутри области, ограниченной (S_i) , то первый интеграл в (61) равен 4π ; интегралы по $(S_1), \dots, (S_{i-1}), (S_{i+1}), \dots, (S_k)$ равны нулю; интеграл по (S_i) равен -2π или -4π , так как нормаль к (S_i) направлена в (D_e) , т. е. внутрь области, ограниченной (S_i) .

§ 10. Другое доказательство формулы Гаусса

В этом параграфе мы дадим другое доказательство формул (60), несколько обобщив их.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{(\Sigma)} \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma, \quad (62)$$

распространенный по части (Σ) некоторой поверхности; надо определить величину этого интеграла в точке m .

Предположим, что полупрямые, проведенные из точки m , пересекают (S) каждая не более чем в одной точке, и что каждая полупрямая образует с нормалью N к (S) в точке пересечения острый угол. Возьмем m в качестве начала сферической системы координат. Опишем около точек m как центра сферу радиуса единица. Так как $(r_{10}N)$ есть угол между радиусом-вектором и нормалью к (Σ) в соответствующей точке, то $\cos(r_{10}N) d\sigma$ равно площади проекции элемента $d\sigma$ поверхности (Σ) на сферу с центром в m и радиусом r_{10} . Поэтому

$$d\sigma_0 = \frac{\cos(r_{10}N)}{r_{10}^2} d\sigma$$

есть элемент единичной сферы, упомянутой выше. Отсюда следует, что интеграл (62) равен интегралу

$$\int_{(\Sigma)} d\sigma_0, \quad (63)$$

где (Σ_0) есть часть единичной сферы, вырезанная конусом, вершина которого находится в m , а направляющей служит контур поверхности (Σ) . Интеграл (63) равен телесному углу, под которым из точки m видна поверхность (Σ) (рис. 14).

Если углы между радиусами-векторами и нормалью к (Σ) были бы тупые, интеграл (62) отличался бы от интеграла (63) только знаком.

Согласимся называть отрицательной сторону поверхности, на которой стоит наблюдатель, вытянувший тело по направлению нормали, и положительной противоположную сторону.

Тогда предыдущие результаты можно высказать так: интеграл (62) равен углу, под которым видна (Σ) из точки m , взятому со знаком плюс, если видна положительная сторона поверхности, и взятому со знаком минус, если видна отрицательная сторона поверхности.

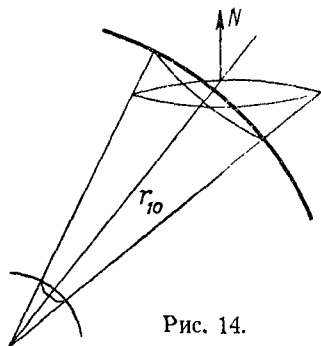


Рис. 14.

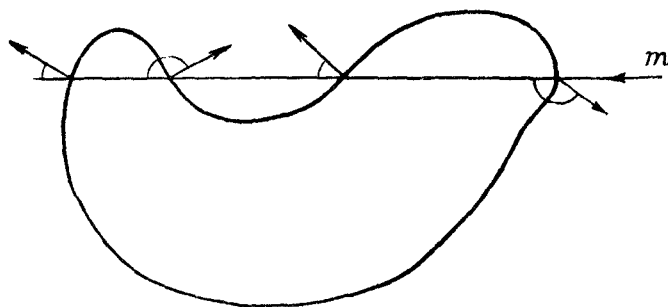


Рис. 15.

Предположим, что полупрямая, выходящая из m , пересекает (Σ) в нескольких точках; предположим, кроме того, что (Σ) можно разбить на конечное число частей, каждая из которых удовлетворяет условиям предыдущего случая.¹ В этом

¹ Это предположение не имеет места для некоторых поверхностей Ляпунова.

случае интеграл (62) равен сумме снабженных соответствующим знаком телесных углов, под которыми видны из m различные части (Σ) (рис. 15).

Пусть (S) замкнутая поверхность. При движении по полу-прямой, выходящей из точки m , в каждой точке пересечения с (S) мы переходим из (D_i) в (D_e) или обратно. Поэтому точки входа и выхода из (D_i) перемежаются и последней точкой является точка выхода. В точках входа элемент телесного угла отрицателен, в точках выхода положителен. Если точка m в (D_e), то точек входа и выхода одинаковое число и сумма элементов телесных углов равна нулю и поэтому имеем третью из формул (60). Если m в (D_i), то первой будет точка выхода, а затем останется одинаковое число точек входа и выхода, и это заключение справедливо для всех направлений. Отсюда легко заключить о справедливости первой из формул (60).

Несколько сложнее получается вторая из формул (60), но на этом мы не останавливаемся.

ГЛАВА II

ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА

§ 1. Потенциал простого слоя

Предположим, что область (D_i) ограничена конечным числом поверхностей Ляпунова. Обозначим через (S) границу области (D_i) . Условимся обозначать координаты точек m_2 поверхности (S) буквами ξ, η, ζ .

Пусть m точка с координатами (x, y, z) ; r_{20} — расстояние между точками m и m_2 ; r_{20} предполагаем направленным из m в m_2 . Пусть μ интегрируемая функция на (S) .

Функция

$$V = \int_{(S)} \mu \frac{d\sigma}{r_{20}} \quad (1)$$

называется потенциалом простого слоя; μ — его плотностью.

Если точка m не на (S) , V , очевидно, имеет производные по x, y, z :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_{(S)} \mu \frac{\xi - x}{r_{20}^3} d\sigma$$

.

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \int_{(S)} \mu \frac{\zeta - z}{r_{20}^3} d\sigma$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \int_{(S)} \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r_{20}} d\sigma$$

.

Так как лапласиан функции $\frac{1}{r_{20}}$ равен нулю, то имеем:

$$\Delta V = \int_{(S)} \mu \cdot \Delta \frac{1}{r_{20}} d\tau = 0$$

и, таким образом, V есть гармоническая функция во всякой конечной области, лежащей вместе с границей внутри (D_i) или внутри (D_e) . Из формул для V и ее первых производных нетрудно заключить, что при удалении точки m в бесконечность V стремится к нулю как первая степень, а $\left| \frac{\partial V}{\partial x} \right|$, $\left| \frac{\partial V}{\partial y} \right|$, $\left| \frac{\partial V}{\partial z} \right|$ как вторая степень $\frac{1}{R}$, где R расстояние точки m до некоторой фиксированной точки пространства. Отсюда следует, что V есть гармоническая функция во всякой бесконечной области, лежащей вместе с границей внутри (D_e) .

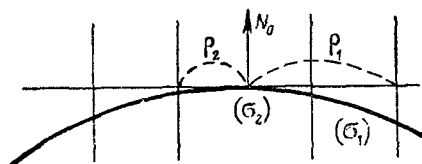


Рис. 16.

Покажем, что если μ ограничена и интегрируема, то интеграл сходится, если даже точка m на (S) .

Итак, пусть m на S . Для доказательства сходимости интеграла (1) достаточно показать, что интеграл

$$\int_{(\sigma_1 - \sigma_2)} |\mu| \frac{d\sigma}{r_{20}}$$

бесконечно мал вместе с ρ_1 , где (σ_1) и (σ_2) суть части (S) , лежащие внутри сферы Ляпунова с центром в m , и вырезанные круговыми цилиндрами радиусов ρ_1 и ρ_2 ($\rho_2 < \rho_1$), имеющими осью нормаль в точке m (рис. 16).

Пусть A верхняя грань для $|\mu|$ на (S) . Учитывая, что r_{20} больше своей проекции ρ на касательную плоскость в точке m , и применяя оценку (16) § 1 (I), найдем:

$$\int_{(\sigma_1 - \sigma_2)} |\mu| \frac{d\sigma}{r_{20}} < A \cdot 2 \int_0^{2\pi} \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho} = 4\pi A (\rho_1 - \rho_2) < 4\pi A \rho_1,$$

что и доказывает утверждение.

Из полученного неравенства заключаем

$$\int_{(\sigma)} \frac{|\mu| d\sigma}{r_{20}} \leq 4\pi A\rho_1. \quad (2)$$

Этот параграф закончим несколькими замечаниями, относящимися к неравенствам, которые будут выведены в последующих параграфах.

Пусть μ функция, заданная на (S) или (D) . В дальнейшем о μ будут делаться главным образом следующие предположения: либо μ ограничена и интегрируема, либо μ ограничена и правильно непрерывна. В первом случае A будет означать какую-либо из верхних граней для $|\mu|$. Во втором случае A будет означать какую-либо из тех верхних граней для $|\mu|$, которые превосходят коэффициент в условии правильной непрерывности функций μ ; тогда, очевидно, имеем

$$|\mu| < A, \quad |\mu_1 - \mu_0| < Ar_{10}^\lambda,$$

где μ_1 и μ_0 значения μ в точках m_1 и m_0 .

Очевидно, что если μ правильно непрерывна с показателем λ , то она правильно непрерывна с любым показателем λ' , где $0 < \lambda' < \lambda$. Поэтому в последующем λ будет означать одновременно показатель правильной непрерывности функции μ и показатель во втором условии Ляпунова для поверхностей Ляпунова.

В последующем, оценивая модули каких-либо величин, будем получать, что они не превосходят суммы некоторых из последующих функций переменного δ

$$c_1 A \delta, \quad c_2 A \delta^\lambda, \quad c_3 A \delta^\lambda \ln \left(\frac{d}{\delta} \right), \quad \left(0 < \delta \leq \frac{d}{2}, \quad 0 < \lambda \leq 1 \right),$$

где c_1, c_2, c_3 — постоянные, зависящие от вида поверхности или области.

Так как

$$c_1 A \delta = c_1 A \delta^{1-\lambda} \cdot \delta^\lambda \leq c'_1 A \delta^\lambda, \quad c'_1 = c_1 \left(\frac{d}{2} \right)^{1-\lambda},$$

то в случае, если в оценку входит сумма лишь первых двух функций, оцениваемая величина не превосходит $(c'_1 + c_2) A \delta^\lambda = A A \delta^\lambda$, где $0 < \lambda \leq 1$. Если в оценку входит и третья функция, то оцениваемая величина не превосходит числа вида

$aA\delta^{\lambda'}$, где λ' произвольное число, $0 < \lambda' < \lambda$, и от выбора λ' зависит величина коэффициента a . Действительно, так как для $\nu > 0$ имеем

$$\delta^{\nu} \ln \frac{d}{\delta} = d^{\nu} \left(\frac{\delta}{d} \right)^{\nu} \ln \frac{d}{\delta} \leq d^{\nu} \cdot \max_{0 < x \leq 1} \left(x^{\nu} \ln \frac{1}{x} \right) = \frac{d^{\nu}}{e^{\nu}},$$

то, полагая $\nu = \lambda - \lambda'$, будем иметь:

$$c_3 A \delta^{\lambda} \ln \frac{d}{\delta} = c_3 A \delta^{\lambda'} \cdot \delta^{\nu} \ln \frac{d}{\delta} \leq \left(\frac{c_3 d^{\nu}}{e^{\nu}} \right) A \delta^{\lambda'} = c'_3 A \delta^{\lambda'},$$

$$c'_3 = \frac{c_3 d^{\nu}}{e^{\nu}},$$

откуда следует наше утверждение, причем $a = c_1 \left(\frac{d}{2} \right)^{1-\lambda'} + c_2 \left(\frac{d}{2} \right)^{\lambda-\lambda'} + c'_3$. В последующем при наличии в оценке какой-либо величины слагаемого третьего типа окончательную оценку будем писать в виде $aA\delta^{\lambda'}$, не поясняя каждый раз произвольность в выборе λ' и зависимость коэффициента a от выбора λ' .

Кроме того в последующем, если не будет сделано особой оговорки, будем считать $\lambda < 1$, так как предположение $\lambda = 1$, не приводя, как правило, к более сильному результату, требует лишних оговорок.

§ 2. Непрерывность потенциала простого слоя

Теорема. Если плотность μ потенциала простого слоя есть функция, ограниченная и интегрируемая, то потенциал правильно непрерывен во всем пространстве.

Из замечаний § 1 следует, что V правильно непрерывна во всякой области, целиком содержащейся в (D_i) или в (D_e) . Остается, следовательно, рассмотреть точки, расположенные в окрестности границы.

Предположим, что точка m_0 находится на (S) и что точка m_1 , расстояние которой до m_0 обозначим δ , находится или на (S) или на нормали к (S) в точке m_0 . Для краткости оба случая рассмотрим одновременно, называя первый случаем (а), а второй случаем (б). Пусть r_{20} и r_{21} расстояния точек m_0 и m_1 до точки m_2 интегрирования. Введем сферу Ляпунова для точки m_0 ; пусть (Σ) часть (S) внутри сферы. Предположим сначала, что δ меньше $\frac{d}{2}$.

записать:

$$I = \int_{(\Sigma - \sigma)} \mu \left(\frac{1}{r_{20}} - \frac{1}{r_{21}} \right) d\sigma + \int_{(\sigma)} \mu \frac{d\sigma}{r_{20}} - \int_{(\sigma)} \mu \frac{d\sigma}{r_{21}}, \quad (5)$$

откуда следует

$$|I| \leq \left| \int_{(\Sigma - \sigma)} \mu \left(\frac{1}{r_{20}} - \frac{1}{r_{21}} \right) d\sigma \right| + \left| \int_{(\sigma)} \mu \frac{d\sigma}{r_{20}} \right| + \left| \int_{(\sigma)} \mu \frac{d\sigma}{r_{21}} \right|. \quad (6)$$

Неравенство (2) непосредственно дает:

$$\left| \int_{(\sigma)} \mu \frac{d\sigma}{r_{20}} \right| < 4\pi A (2\delta), \quad (7)$$

так как (σ) содержится внутри части поверхности, вырезанной из (Σ) круговым цилиндром радиуса 2δ , имеющим осью нормаль N_0 в точке m_0 .

В случае (а) можно оценить последний интеграл в (6) с помощью (2). Рассмотрим сферу с центром в m_1 и радиуса 3δ , и пусть (σ_1) часть (S) внутри этой сферы. Так как (σ) содержится в (σ_1) , то имеем:

$$\left| \int_{(\sigma)} \mu \frac{d\sigma}{r_{21}} \right| \leq \int_{(\sigma)} \left| \mu \right| \frac{d\sigma}{r_{21}} \leq \int_{(\sigma_1)} \left| \mu \right| \frac{d\sigma}{r_{21}} \leq 4\pi A (3\delta). \quad (8)$$

В случае (б) мы сразу оценим этот интеграл. Имеем:

$$\left| \int_{(\sigma)} \mu \frac{d\sigma}{r_{21}} \right| \leq \int_{(\sigma)} \left| \mu \right| \frac{d\sigma}{r_{21}} \leq A \cdot 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\delta} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho} = 4A (2\delta), \quad (8')$$

так как в этом случае ρ , являясь проекцией r_{20} на касательную плоскость к (S) в точке m_0 , не превосходит r_{21} .

Таким образом, видим, что во всех случаях сумма двух последних интегралов в (6) не превосходит числа вида $aA\delta$.

Займемся первым интегралом в (6); так как r_{20} и r_{21} суть две стороны треугольника, третья сторона которого равна δ ,

то $-\delta < r_{21} - r_{20} < \delta$, откуда $1 - \frac{\delta}{r_{20}} < \frac{r_{21}}{r_{20}} < 1 + \frac{\delta}{r_{20}}$.

Если точка m_2 на $(\Sigma - \sigma)$, то $r_{20} > 2\delta$; следовательно

$$\frac{1}{2} < \frac{r_{21}}{r_{20}} < \frac{3}{2}, \quad \text{если } m_2 \text{ на } (\Sigma - \sigma). \quad (9)$$

В дальнейшем часто будем пользоваться неравенством (9). Опираясь на это неравенство, получим:

$$\left| \frac{1}{r_{20}} - \frac{1}{r_{21}} \right| = \frac{|r_{21} - r_{20}|}{r_{21}r_{20}} < \frac{\delta}{r_{21}r_{20}} < \frac{2\delta}{r_{20}^2}.$$

Проекция на касательную плоскость в точке m_0 отрезка, соединяющего точку m_0 с некоторой точкой контура области (σ), равна $2\delta \cos \alpha$, где α — угол между этим отрезком и касательной плоскостью; так как этот отрезок пересекает (S) внутри сферы Ляпунова в двух точках, то $\alpha < \frac{\pi}{2} - \omega$ и, следовательно, $\cos \alpha > \sin \omega > \frac{1}{2}$. Поэтому рассматриваемая проекция больше δ . Отсюда следует, что $(\Sigma - \sigma)$ проектируется на касательную плоскость в область, лежащую в кольце с центром в m_0 и радиусами δ и d .

Вводя цилиндрические координаты, которыми мы уже пользовались два раза, получаем, так как r_{20} не меньше ρ :

$$\begin{aligned} \left| \int_{(\Sigma - \sigma)} \mu \left(\frac{1}{r_{20}} - \frac{1}{r_{21}} \right) d\sigma \right| &\leq \int_{(\Sigma - \sigma)} |\mu| \left| \frac{1}{r_{20}} - \frac{1}{r_{21}} \right| d\sigma < \\ &< 2\delta \cdot A \cdot 2 \int_0^{2\pi} \int_{\delta}^d \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho^2} = 8\pi A\delta \ln \frac{d}{\delta} = aA\delta^{\lambda'}. \end{aligned}$$

Следовательно, приходим к неравенству

$$|V_{m_0} - V_{m_1}| < a_1 A \delta^{\lambda'} \quad (\lambda' < 1).$$

Предположим теперь, что m_1 не находится на нормали к (S) в точке m_0 . Если расстояние $m_0 m_1$ равно δ , то расстояние δ_1 от m_1 до (S) меньше δ , и пусть m' точка (S) ближайшая к m_1 . Тогда расстояние δ_2 от m_0 до m' меньше $\delta_1 + \delta < 2\delta$ (рис. 18).

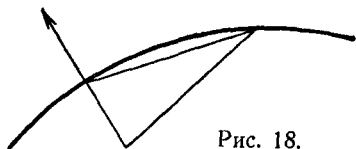


Рис. 18.

Поэтому, так как

$$V_{m_0} - V_{m_1} = V_{m_0} - V_{m'} + V_{m'} - V_{m_1},$$

имеем:

$$\begin{aligned} |V_{m_0} - V_{m_1}| &\leq |V_{m_0} - V_{m'}| + |V_{m'} - V_{m_1}| \leq \\ &\leq a_1 A (\delta_2^{\lambda'} + \delta_1^{\lambda'}) < a_2 A \delta^{\lambda'}. \end{aligned}$$

Случай (а) показывает, что потенциал V правильно непрерывен на (S) . Докажем, что V правильно непрерывен во всем пространстве. Действительно, если хотя бы одна из точек m_0 и m_1 лежит на (S) , то доказано, что разность $V_{m_1} - V_{m_0}$ оценивается как $aA\delta''$. Для доказательства правильной непрерывности V осталось рассмотреть случай, когда ни одна из точек m_0 и m_1 не лежит на (S) .

Допустим, что m_0 более близка к (S) и m'_0 есть точка на (S) , ближайшая к m_0 ; точка m_0 лежит на нормали в точке m'_0 . Пусть δ_1 есть расстояние m_0 до m'_0 , а δ , как и прежде, расстояние m_0 до m_1 . Если $\delta_1 > \frac{d}{2}$, то разность

$$V_{m_1} - V_{m_0} = \int_{(S)} \mu \frac{d\sigma}{r_{20}} - \int_{(S)} \mu \frac{d\sigma}{r_{21}}, \quad (3')$$

очевидно, оценивается через $aA\delta$, так как функции под знаком интеграла имеют ограниченные производные в окрестности точек m_0 и m_1 . Предположим теперь, что $\delta_1 < \frac{d}{2}$. Если $\delta_1 < 2\delta$, то расстояние δ_2 между m_1 и m'_0 меньше 3δ и имеем:

$$\begin{aligned} |V_{m_0} - V_{m_1}| &\leq |V_{m_0} - V_{m'_0}| + |V_{m'_0} - V_{m_1}| < \\ &< aA\delta_1' + aA\delta_2' < bA\delta'. \end{aligned}$$

Осталось рассмотреть случай $\delta_1 > 2\delta$. В этом случае все точки (S) лежат вне сферы радиуса 2δ с центром в m_0 . Тогда, если r' есть расстояние от какой-либо точки отрезка m_0m_1 до некоторой точки m_2 на (S) , то в силу неравенства (9), которое здесь применимо, будем иметь $r' > \frac{1}{2}r_{20}$.

Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{21}} - \frac{1}{r_{20}} &= (x_1 - x_0) \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right)_1 + (y_1 - y_0) \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right)_1 + \\ &\quad + (z_1 - z_0) \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right)_1, \end{aligned}$$

где (x_0, y_0, z_0) (x_1, y_1, z_1) — координаты точек m_0 и m_1 , а производные вычислены в некоторой точке m' отрезка m_0m_1 ,

то заключаем:

$$\left| \frac{1}{r_{21}} - \frac{1}{r_{20}} \right| < \frac{\sqrt{3} \delta}{r'^2} < \frac{4 \sqrt{3} \delta}{r_{20}^2}.$$

Поэтому

$$|V_{m_0} - V_{m_1}| < 4 \sqrt{3} A \delta \int_{(S)} \frac{d\sigma}{r_{20}^2}.$$

Пусть (Σ) и (σ) части (S) внутри сферы Ляпунова и сферы радиуса 2δ с центром в m_0' .

На (S) имеем $r_{20} \geq \delta_1 > 2\delta$ и поэтому

$$\delta \int_{(\sigma)} \frac{d\sigma}{r_{20}^2} < \frac{\delta}{4\delta^2} \int_{(\sigma)} d\sigma < \frac{1}{4\delta} 2 \cdot 2\pi \int_0^{2\delta} \rho d\rho = 2\pi\delta,$$

$$\delta \int_{(\Sigma - \sigma)} \frac{d\sigma}{r_{20}^2} < 4\pi\delta \int_{\delta}^d \frac{\rho d\rho}{\rho^2} = 4\pi\delta \ln \frac{d}{\delta} < a\delta\lambda', \quad (\lambda' < 1),$$

$$\delta \int_{(\Sigma - \Sigma)} \frac{d\sigma}{r_{20}^2} < \delta \cdot \frac{4}{d^2} \int_{(\Sigma - \Sigma)} d\sigma < \frac{4S}{d^2} \delta,$$

так как вне (Σ) $r_{20} > \frac{d}{2}$.

Отсюда заключаем, что наше утверждение доказано для всех возможных положений точек m_0 и m_1 и теорема доказана. Таким образом, для любого положения точек m_0 и m_1 имеем $|V_{m_1} - V_{m_0}| < aA\delta\lambda'$.

§ 3. Три теоремы о потенциале двойного слоя

Пусть $m_0(x, y, z)$ — некоторая точка пространства. Интеграл

$$W = \int_{(S)} \mu \frac{\cos(r_{20}N)}{r_{20}^2} d\sigma, \quad (10)$$

где $m_2(\xi, \eta, \zeta)$ — точка интегрирования, $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ — функция, определенная на (S) , N — нормаль в точке m_2 , называется потенциалом двойного слоя с плотностью μ .

Если μ интегрируема, то, очевидно, интеграл (10) существует, если точка m_0 лежит внутри (D_i) или внутри (D_e) .

Если m_0 любая точка на (S) , то, как было показано в § 6 (I), ограниченность μ является достаточным условием сходимости интеграла (10).

Сейчас мы покажем, что если μ интегрируема, то W есть функция, имеющая непрерывные производные любого порядка в каждой внутренней точке (D_i) или (D_e) , и удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0.$$

Действительно, интеграл (10) можно переписать в виде:

$$W = \int_{(S)} \mu \cos(N\xi) \frac{\xi - x}{r_{20}^3} d\sigma + \int_{(S)} \mu \cos(N\eta) \frac{\eta - y}{r_{20}^3} d\sigma + \int_{(S)} \mu \cos(N\zeta) \frac{\zeta - z}{r_{20}^3} d\sigma.$$

Сравнивая с формулами, данными в § 1 для первых производных потенциала простого слоя, видим, что последние интегралы суть производные соответственно по x , y , z потенциалов простого слоя с плотностями $\mu \cos(N\xi)$, $\mu \cos(N\eta)$, $\mu \cos(N\zeta)$.

Так как потенциал простого слоя во всякой внутренней точке (D_i) или (D_e) имеет непрерывные производные любого порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа, то, очевидно, то же можно сказать о любой производной и, следовательно, о W .

Кроме того, при удалении точки m_0 в бесконечность $|W|$ стремится к нулю как вторая степень, а $\left| \frac{\partial W}{\partial x} \right|$, $\left| \frac{\partial W}{\partial y} \right|$, $\left| \frac{\partial W}{\partial z} \right|$ как третья степень $\frac{1}{R}$, где R — расстояние от m_0 до некоторой фиксированной точки пространства. Отсюда следует, что W гармоническая функция во всякой области (конечной или бесконечной), содержащейся вместе с границей в (D_i) или в (D_e) .

Условимся обозначать через \overline{W} значение W в точке поверхности и докажем две следующие теоремы.

Теорема 1. Если μ ограничена и интегрируема, то \overline{W} правильно непрерывная функция точки m_0 на (S) .

Теорема 2. Если μ непрерывна на (S) и если точка m_1 внутри (D_i) или внутри (D_e) , и если m_1 перемещается, стремясь к точке m_0 на (S) , то имеем соответственно:

$$\lim W_1 = W_i = \bar{W}_0 + 2\pi\mu_0 \text{ и } \lim W_1 = W_e = \bar{W}_0 - 2\pi\mu_0. \quad (11)$$

Мы здесь обозначаем через W_1 значение W в точке m_1 и через μ_0 и \bar{W}_0 значения μ и \bar{W} в точке m_0 . Далее, W_i и W_e обозначают пределы для W_1 , когда точка m_1 стремится к границе области (D_i) соответственно изнутри или извне.

Формулы (11) показывают, что имеем:

$$W_i - W_e = 4\pi\mu_0, \quad W_i + W_e = 2\bar{W}_0. \quad (12)$$

Добавление к теореме 2. Если μ правильно непрерывна на (S) , т. е. если

$$|\mu - \mu_0| < Ar'_{20}, \quad (13)$$

где r_{20} есть расстояние между m_2 и m_0 , то имеем неравенства:

$$\begin{aligned} |W_1 - \bar{W}_0 - 2\pi\mu_0| &< aA\delta^2, \\ |W_1 - \bar{W}_0 + 2\pi\mu_0| &< aA\delta^2, \end{aligned}$$

где точка m_1 в (D_i) соответственно в (D_e) на расстоянии δ от m_0 .

Как в § 2, мы рассмотрим обе теоремы одновременно, обозначая через (а) случай, когда m_1 на (S) , и через (б) случай, когда m_1 не на (S) . Мы сохраним обозначения § 2. Предположим сначала, что когда точка m_1 не на (S) , она находится на нормали в m_0 . Кроме того, предположим, что расстояние δ между m_0 и m_1 меньше $\frac{d}{2}$. Надо помнить, что μ подчинена условиям: в случае (а) ограничена и по модулю меньше некоторого числа A ; в случае (б) непрерывна и в доопределенном случае μ правильно непрерывна.

Начнем с замечания по случаю (б). Предположим, что (τ_0) есть часть (S) , вырезанная сферой радиуса R с центром в m_0 ; пусть $\theta(R)$ есть максимум $|\mu - \mu_0|$ на (τ_0) :

$$|\mu - \mu_0| \leq \theta(R), \quad \text{если } m \text{ на } (\tau_0). \quad (14)$$

Если μ правильно непрерывна на (S) , то

$$\theta(R) < cR^2;$$

если μ просто непрерывна на (S) , то можно лишь заключить, что $\lim \theta(R) = 0$, если $R \rightarrow 0$.

$\theta(R)$ есть возрастающая функция R , так как если $R' > R$ и (σ'_0) отвечает R' , то (σ'_0) содержит (σ_0) .

Предположим теперь, что m_1 на (S) или на нормали к (S) ; имеем

$$\begin{aligned} W_1 - \bar{W} &= \int_{(\dot{S})} \mu \frac{\cos(r_{21}N)}{r_{21}^2} d\sigma - \int_{(\dot{S})} \mu \frac{\cos(r_{20}N)}{r_{20}^2} d\sigma = \\ &= \int_{(\dot{S})} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{21}N)}{r_{21}^2} d\sigma - \int_{(\dot{S})} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{20}N)}{r_{20}^2} d\sigma + \\ &+ \mu_0 \int_{(\dot{S})} \frac{\cos(r_{21}N)}{r_{21}^2} d\sigma - \mu_0 \int_{(\dot{S})} \frac{\cos(r_{20}N)}{r_{20}^2} d\sigma. \end{aligned} \quad (15)$$

Последний интеграл в (15) равен 2π , согласно свойствам интеграла Гаусса, и поэтому последний член в (15) равен $-2\pi\mu_0$. В случае (а) точка m_1 на (S) и предпоследний член в (15) равен $2\pi\mu_0$, так что сумма двух последних членов равна нулю. В случае (б) необходимо различать случай, когда m в (D_i) , от случая, когда m в (D_e) . Если m в (D_i) , предпоследний член равен $4\pi\mu_0$; если m в (D_e) , он равен нулю.

Итак, сумма двух последних членов в (15) равна:

$$\left. \begin{aligned} 2\pi\mu_0 - 2\pi\mu_0 &= 0, & \text{если } m_1 \text{ на } (S), \\ 4\pi\mu_0 - 2\pi\mu_0 &= 2\pi\mu_0, & \text{если } m_1 \text{ в } (D_i), \\ 0 - 2\pi\mu_0 &= -2\pi\mu_0, & \text{если } m_1 \text{ в } (D_e). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Остается оценить разность

$$I = \int_{(\dot{S})} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{21}N)}{r_{21}^2} d\sigma - \int_{(\dot{S})} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{20}N)}{r_{20}^2} d\sigma.$$

Опишем, как в § 2, сферу Ляпунова около точки m_0 и обозначим через (Σ) часть (S) внутри сферы. Тогда можем записать:

$$\begin{aligned} I &= \int_{(S-\Sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{21}N)}{r_{21}^2} d\sigma - \int_{(S-\Sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{20}N)}{r_{20}^2} d\sigma + \\ &+ \int_{(\dot{\Sigma})} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{21}N)}{r_{21}^2} d\sigma - \int_{(\dot{\Sigma})} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{20}N)}{r_{20}^2} d\sigma. \end{aligned}$$

Если точка m_2 на $(S - \Sigma)$, r_{21} больше $\frac{d}{2}$ и интеграл

$$\int_{(S-\Sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{21}N)}{r_{21}^2} d\sigma$$

непрерывен и ограничен вместе с производными, так как расстояние от m_1 до m_0 не превосходит $\frac{d}{2}$. Отсюда следует,

что

$$\left| \int_{(S-\Sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{21}N)}{r_{21}^2} d\sigma - \int_{(S-\Sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{20}N)}{r_{20}^2} d\sigma \right| < aA\delta,$$

и нам остается оценить разность

$$I_1 = \int_{(\Sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{21}N)}{r_{21}^2} d\sigma - \int_{(\Sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{20}N)}{r_{20}^2} d\sigma.$$

Опишем около точки m_0 , как в § 2, сферу радиуса 2δ . Имеем:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_{(\Sigma-\sigma)} (\mu - \mu_0) \left\{ \frac{\cos(r_{21}N)}{r_{21}^2} - \frac{\cos(r_{20}N)}{r_{20}^2} \right\} d\sigma + \\ &+ \int_{(\sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{21}N)}{r_{21}^2} d\sigma - \int_{(\sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{20}N)}{r_{20}^2} d\sigma; \\ |I_1| &\leq \left| \int_{(\Sigma-\sigma)} (\mu - \mu_0) \left\{ \frac{\cos(r_{21}N)}{r_{21}^2} - \frac{\cos(r_{20}N)}{r_{20}^2} \right\} d\sigma \right| + \\ &+ \left| \int_{(\sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{21}N)}{r_{21}^2} d\sigma \right| + \left| \int_{(\sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{20}N)}{r_{20}^2} d\sigma \right|. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Так как $|\mu - \mu_0| < 2A$, то, пользуясь неравенством (38) и (I) и замечаниями § 2, находим, что последний интеграл в (17) меньше $cA(2\delta)^3$, где c — определенное число. В случае (а) предпоследний интеграл в (17) меньше $cA(3\delta)^3$, так как часть (σ_2) поверхности (S) внутри сферы радиуса 3δ центром в m_1 содержит в себе (σ) , что мы уже отмечали § 2.

В случае (б) мы оценим этот интеграл непосредственно. На (σ)

$$|\mu - \mu_0| < 6(2\delta),$$

$\cos(r_{21}N)$ по модулю меньше единицы. Обозначая через α и β углы при вершинах m_0 и m_2 треугольника $m_0m_1m_2$, найдем:

$$\frac{r_{21}}{\delta} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad r_{21} = \delta \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} > \delta \sin \alpha > \delta \sin \omega > \frac{1}{2} \delta,$$

так как α есть угол между нормалью в m_0 и прямой, проходящей через m_0 и пересекающей (S) внутри сферы Лянунова в двух точках.

Отсюда следует, что

$$\left| \int_{(\sigma)} (\mu - \nu_0) \frac{\cos(r_{21}N)}{r_{21}^2} d\sigma \right| < \frac{\theta(2\delta)}{\delta^2} \cdot 2^2 \int_{(\sigma)} d\sigma < \frac{2^3 \theta(2\delta)}{\delta^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\delta} \rho d\rho d\varphi = \\ = 32\pi\theta(2\delta) \quad (18)$$

и, следовательно, интеграл бесконечно мал вместе с δ .

Если μ правильно непрерывна, интеграл оценивается величиной $\alpha A \delta^3$. Итак, в случаях (а) и дополнительном, сумма двух последних интегралов в (17) оценивается величиной $\alpha A \delta^3$; в случае (б) эта сумма бесконечно мала вместе с δ .

Перейдем к первому члену (17). Имеем:

$$\frac{\cos(r_{21}N)}{r_{21}^2} - \frac{\cos(r_{20}N)}{r_{20}^2} = \frac{r_{21} \cos(r_{21}N)}{r_{21}^3} - \frac{r_{20} \cos(r_{20}N)}{r_{20}^3} = \\ = \frac{r_{21} \cos(r_{21}N) - r_{20} \cos(r_{20}N)}{r_{21}^3} + r_{20} \cos(r_{20}N) \left\{ \frac{1}{r_{21}^3} - \frac{1}{r_{20}^3} \right\} = \\ = \frac{\delta \cos(r_{01}N)}{r_{21}^3} + r_{20} \cos(r_{20}N) \left\{ \frac{1}{r_{21}^3} - \frac{1}{r_{20}^3} \right\}. \quad (19)$$

В самом деле, во всех случаях, r_{21} есть геометрическая сумма векторов r_{01} и r_{20} ; поэтому

$$r_{21} \cos(r_{21}N) = r_{20} \cos(r_{20}N) + \delta \cos(r_{01}N).$$

Рассмотрим отдельно случаи (а) и (б).

В случае (а), если (N_0) есть нормаль к (S) в m_0 , то имеем:

$$\cos(r_{01}N) = \cos(r_{01}N_0) + [\cos(r_{01}N) - \cos(r_{01}N_0)];$$

между тем имеем

$$|(r_{01}N) - (r_{01}N_0)| < (N_0N);$$

следовательно,

$$|\cos(r_{01}N) - \cos(r_{01}N_0)| < (N_0N) < Er_{20}^\lambda.$$

Кроме того, в силу неравенства (17) § 1 (I), имеем:

$$|\cos(r_{01}N_0)| < Er_{01}' = E\delta^\lambda,$$

и поэтому

$$\delta |\cos(r_{01}N)| < E\delta^{1+\lambda} + E\delta r_{20}^\lambda.$$

Оценивая интеграл, отвечающий первому члену правой части (19), заключаем, благодаря неравенству (9),

$$\begin{aligned} & \left| \int_{(x-\sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\delta \cos(r_{01}N)}{r_{21}^3} d\sigma \right| < \\ & 2AE\delta \cdot 2 \cdot 2^3 \int_0^{2\pi} \int_\delta^d \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho^{3-\lambda}} + 2AE\delta^{1+\lambda} \cdot 2 \cdot 2^3 \int_0^{2\pi} \int_\delta^d \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho^3} = \\ & = c_1 A\delta \left\{ \frac{1}{\delta^{1-\lambda}} - \frac{1}{d^{1-\lambda}} \right\} + c_2 A\delta^{1+\lambda} \left\{ \frac{1}{\delta} - \frac{1}{d} \right\} < cA\delta^\lambda. \end{aligned}$$

Перейдём к случаю (б). В силу неравенства (12) § 1 (I) и того факта, что $\theta(R)$ неубывающая функция, можем написать:

$$|\mu - \mu_0| < \theta(r_{20}) < \theta(2\rho).$$

Используя цилиндрические координаты, получим:

$$\begin{aligned} \left| \int_{(x-\sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\delta \cos(r_{01}N)}{r_{21}^3} d\sigma \right| & < 2^3 \delta \cdot 2 \int_0^{2\pi} \int_\delta^d \frac{\theta(2\rho) \rho d\rho d\varphi}{\rho^3} = \\ & = 2^3 \cdot 4\pi\delta \int_\delta^d \frac{\theta(2\rho)}{\rho^2} d\rho. \end{aligned}$$

Мы всюду полагали $\frac{1}{2}r_{20}$ вместо r_{21} и ρ вместо r_{20} .

Между тем, когда δ стремится к нулю,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \int_\delta^d \frac{\theta(2\rho)}{\rho^2} d\rho = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\int_\delta^d \frac{\theta(2\rho)}{\rho^2} d\rho}{\frac{1}{\delta}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{-\frac{\theta(2\delta)}{\delta^2}}{-\frac{1}{\delta^2}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \theta(2\delta) = 0.$$

В дополнительном случае интеграл меньше, чем

$$2^3 \cdot 4\pi \delta A \int_0^a \frac{(2\rho)^\lambda d\rho}{\rho^2} = aA\delta \left\{ \frac{1}{\delta^{1-\lambda}} - \frac{1}{a^{1-\lambda}} \right\} < aA\delta^\lambda.$$

Итак, в случаях (а) и дополнительном интеграл оценивается величиной $aA\delta^\lambda$; в случае (б) интеграл бесконечно мал вместе с δ . Обратимся к последнему члену правой части (19). Неравенство (9) дает:

$$\begin{aligned} \left| r_{20} \left\{ \frac{1}{r_{21}^3} - \frac{1}{r_{20}^3} \right\} \right| &= \frac{|r_{20}^3 - r_{21}^3|}{r_{21}^3 r_{20}^3} = \frac{|r_{21} - r_{20}| (r_{20}^2 + r_{20}r_{21} + r_{21}^2)}{r_{21}^3 r_{20}^3} < \\ &< \frac{\delta \left(r_{20}^2 + \frac{3}{2} r_{20}^2 + \frac{9}{4} r_{20}^2 \right)}{\left(\frac{1}{2} \right)^3 r_{20}^3 r_{20}^3} = \frac{a\delta}{r_{20}^3}. \end{aligned}$$

Благодаря неравенству (17), установленному в § 1 (I), имеем:

$$|\cos(r_{20}N)| < Er_{20}^\lambda.$$

Во всех случаях имеем:

$$\begin{aligned} \left| \int_{(\Sigma-\sigma)} (\mu - \mu_0) r_{20} \cos(r_{20}N) \left\{ \frac{1}{r_{21}^3} - \frac{1}{r_{20}^3} \right\} d\sigma \right| &< \\ &< 2abA\delta \int_{(\Sigma-\sigma)} \frac{r_{20}^\lambda d\sigma}{r_{20}^3} < 2abA\delta \cdot 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho^{3-\lambda}} < cA\delta^\lambda. \end{aligned}$$

Итак, интеграл I_1 оценивается величиной $aA\delta^\lambda$ в случаях (а) и дополнительном; в случае (б) I_1 бесконечно мал вместе с δ . Теорема 1, таким образом, доказана; теорема 2 доказана для случая, когда m_1 находится на нормали к (S) в точке m_0 .

По предположению μ непрерывна на (S) . Так как (S) есть замкнутое ограниченное множество, то μ равномерно непрерывна на (S) . Следовательно, можно указать такую возрастающую функцию $\theta(R)$ ($\theta(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow 0$), что неравенство (14) выполняется независимо от положения точки m_0 на (S) . Собирая вместе все оценки, полученные для случая (б), имеем,

бегля для определенности случай, когда m_1 в (D_i) :

$$|W_1 - \bar{W}_0 - 2\pi\mu_0| < aA\delta + b\delta^\lambda + c\delta(2\delta) + c\delta \int_0^a \frac{\theta(2\rho)}{\rho^2} d\rho = \psi(\delta),$$

где $\psi(\delta)$ непрерывная функция и $\psi(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$; $\psi(\delta)$ является возрастающей, если коэффициент a выбрать достаточно большим, что будем предполагать выполненным.

Пусть теперь точка m_1 находится внутри (D_i) на расстоянии δ от точки m_0 . Тогда расстояние δ_1 точки m_1 до (S) не превосходит δ и если m_2 есть ближайшая к m_1 точка (S) , то расстояние m_2 до m_0 меньше 2δ . Учитывая, что m_1 лежит на нормали к (S) в точке m_2 , будем иметь:

$$\begin{aligned} |W_1 - W_0 - 2\pi\mu_0| &\leq |W_1 - \bar{W}_2 - 2\pi\mu_2| + |\bar{W}_2 - \bar{W}_0| + \\ &+ 2\pi|\mu_2 - \mu_0| < \psi(\delta_1) + aA\delta^\lambda + 2\pi\delta(2\delta) < \psi(\delta) + \\ &+ aA\delta^\lambda + 2\pi\delta(2\delta) = \varphi(\delta), \end{aligned}$$

где $\varphi(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 следует, что потенциал двойного слоя W с непрерывной плотностью равномерно непрерывен в (D_i) и в (D_e) и является гармонической функцией внутри (D_i) и внутри (D_e) .

Действительно, в замкнутой области, состоящей из (D_i) и границы (S) , рассмотрим функцию, равную W в (D_i) и W_i на (S) . Очевидно, W непрерывна в каждой внутренней точке (D_i) , даже если плотность μ не непрерывна. Кроме того, в силу теорем 1 и 2 она непрерывна в каждой точке (S) . Таким образом, рассматриваемая функция непрерывна в каждой точке конечной замкнутой области и поэтому равномерно непрерывна. Отсюда — W равномерно непрерывна в (D_i) . Извлечение первых производных W при удалении m_0 обеспечивает равномерную непрерывность W вне любого шара, содержащего внутри поверхность (S) . Так как для конечной части (D_e) , лежащей в шаре, равномерная непрерывность доказывается как и для (D_i) , то W равномерно непрерывна в (D_e) . Так как W удовлетворяет уравнению Лапласа и убывает вместе с производными подобающим образом при удалении m_0 , то W гармоническая внутри (D_i) и внутри (D_e) .

Добавление. Заметим, что доказательство теоремы 2 можно провести для любой точки m_0 , лежащей внутри части (S) , где функция μ непрерывна. Поэтому справедлива теорема: пусть плотность μ потенциала двойного слоя интегрируема (но может быть неограничена). Если μ непрерывна с некоторой части (S) и m_0 есть внутренняя точка этой части, то справедливы формулы (11).

Также справедлива теорема: если μ интегрируема на (S) и ограничена в окрестности точки m_0 , то W непрерывна в точке m_0 .

Теорема 3. Если μ правильно непрерывна, то потенциал двойного слоя правильно непрерывен в (D_i) и в (D_e) .

Для определенности будем рассматривать случай (D_i) и через $W_i(m)$ обозначать предельное значение W в точке m поверхности (S) .

По предположению имеем:

$$|\mu| < A, \quad |\mu_1 - \mu_0| < Ar_{10}^2$$

и, следовательно, $\theta(R) = AR^2$. Поэтому находим, ограничиваясь для простоты случаем $\lambda < 1$:

$$\psi(\delta) = aA\delta + bA\delta^2 + c\theta(2\delta) + c\delta \int_0^{\frac{\delta}{2}} \frac{A(2\rho)^2}{\rho^2} d\rho < c_1\delta^\lambda, \quad \left(\delta \leq \frac{d}{2}\right),$$

и аналогично $\varphi(\delta) < c_2\delta^\lambda$.

Поэтому на основании предыдущего

$$|W(m_1) - W_i(m)| < c_2A\delta_1^\lambda,$$

если расстояние точки m_1 области (D_i) до точки m на (S) не превосходит δ_1 .

Пусть δ означает расстояние между двумя точками m_1 и m_2 области (D_i) . Покажем, что существует такая постоянная $c > 0$, что

$$|W(m_1) - W(m_2)| < cA\delta^\lambda.$$

Необходимо рассмотреть несколько случаев расположения точек m_1 и m_2 . Если $\delta \geq \frac{d}{4}$, то так как $|W| < aA$, то

$$|W(m_1) - W(m_2)| < 2aA = A \cdot \frac{2a}{\left(\frac{d}{4}\right)^\lambda} \cdot \left(\frac{d}{4}\right)^\lambda = Ac \cdot \left(\frac{d}{4}\right)^\lambda \leq cA\delta^\lambda$$

и, следовательно, достаточно рассмотреть случай, когда $\delta < \frac{d}{4}$.

Обозначим через δ_1 и δ_2 расстояния точек m_1 и m_2 до (S) . Будем всегда считать $\delta_1 \leq \delta_2$. Если $\delta < \frac{d}{4}$, а $\delta_1 \geq \frac{d}{2}$, то точки m_1 и m_2 и отрезок прямой, соединяющий их, лежат в области, все точки которой от (S) удалены не менее чем на $\frac{d}{4}$. Очевидно, в этой области первые производные функции W ограничены числом вида cA и, следовательно, модуль разности $W(m_1) - W(m_2)$ меньше числа вида $3cA\delta$.

Осталось рассмотреть случай $\delta_1 < \frac{d}{2}$, $\delta < \frac{d}{4}$. Здесь будем различать два случая:

1) $\delta_1 < 2\delta$. Если m означает точку на (S) , ближайшую к m_1 , то $m_1m < \delta_1$ и $m_2m \leq m_1m_2 + m_1m \leq \delta_1 + \delta < 3\delta$, и поэтому

$$|W(m_1) - W(m_2)| \leq |W(m_1) - W_i(m)| + |W_i(m) - W(m_2)| \leq \leq c_3A(2\delta)^k + c_3A(3\delta)^k = c_1A\delta^k.$$

2) $\delta_1 \geq 2\delta$. Тогда, обозначая через (Σ) часть (S) внутри сферы Лянунова с центром в точке m_0 , ближайшей к m_1 , и через (τ) часть (Σ) внутри сферы радиуса 2δ с центром в m_0 , получим, обозначая через m_3 точку интегрирования:

$$\begin{aligned} W(m_1) - W(m_2) &= \int_{(S)} \mu \frac{\cos(r_{13}N_3)}{r_{13}^2} d\tau_3 - \int_{(S)} \mu \frac{\cos(r_{23}N_3)}{r_{23}^2} d\tau_3 = \\ &= \int_{(S-\Sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{13}N_3)}{r_{13}^2} d\tau_3 - \int_{(S-\Sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{23}N_3)}{r_{23}^2} d\tau_3 + \\ &+ \int_{(\Sigma-\tau)} (\mu - \mu_0) \left\{ \frac{\cos(r_{13}N_3)}{r_{13}^2} - \frac{\cos(r_{23}N_3)}{r_{23}^2} \right\} d\tau_3 + \\ &= \int_{(\tau)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{13}N_3)}{r_{13}^2} d\tau_3 - \int_{(\tau)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{23}N_3)}{r_{23}^2} d\tau_3, \end{aligned}$$

где μ_0 означает значение μ в точке m_0 .

Замечая, что $r_{13} \geq 2\delta$ и $r_{23} \geq 2\delta$, интегралы по (σ) оценим числами вида:

$$4\pi A \int_0^{2\delta} \rho^\lambda \cdot \frac{\rho d\rho}{\rho^3} = \frac{4\pi A}{\delta^4} \frac{(2\delta)^{2+\lambda}}{2+\lambda} = A \cdot \frac{4\pi \cdot 2^{2+\lambda}}{2+\lambda} \delta^\lambda = aA\delta^\lambda.$$

Расстояния точек m_1 и m_2 до $(S - \Sigma)$ не меньше $\frac{d}{4}$. Поэтому модуль разности интегралов по $(S - \Sigma)$ не превосходит числа вида $cA\delta$. Остается оценить интеграл по $(\Sigma - \sigma)$.

Имеем:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\cos(r_{13}N_3)}{r_{13}^2} - \frac{\cos(r_{23}N_3)}{r_{23}^2} \right| \leq \left| \frac{r_{13} \cos(r_{13}N_3) - r_{23} \cos(r_{23}N_3)}{r_{13}^3} \right| + \\ & + \left| \cos(r_{23}N_3) \left(\frac{r_{23}}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{23}^2} \right) \right| \leq \frac{1}{r_{13}^3} \delta |\cos(r_{13}N_3)| + \\ & + \frac{|r_{23} - r_{13}| (r_{23}^2 + r_{23}r_{13} + r_{13}^2)}{r_{13}^3 r_{23}^2} \leq \frac{\delta}{r_{13}^3} + \delta \left(\frac{1}{r_{13}^3} + \frac{1}{r_{13}^2 r_{23}} + \frac{1}{r_{13} r_{23}^2} \right). \end{aligned}$$

Так как точка m_3 на $(\Sigma - \sigma)$ лежит вне шара радиуса 2δ с центром в m_1 , то в силу неравенства (9) имеем $r_{23} > \frac{1}{2}r_{13}$; кроме того, очевидно, $r_{13} > \rho$ и поэтому изучаемая разность не превосходит $\frac{8\delta}{\rho^3}$. Отсюда имеем для интеграла по $(S - \Sigma)$ следующую оценку:

$$4\pi A \cdot 8\delta \int_{\delta}^d \rho^\lambda \cdot \frac{\rho d\rho}{\rho^3} = 4\pi A \cdot 8\delta \frac{\delta^{\lambda-1} - d^{\lambda-1}}{1-\lambda} < \frac{32\pi}{1-\lambda} A\delta^\lambda$$

и, следовательно, также в случае $\delta_1 \geq 2\delta$ модуль разности $W(m_1) - W(m_2)$ не превосходит числа вида $cA\delta^\lambda$ и теорема доказана. Заметим, что если $\lambda = 1$, то вместо оценок вида $cA\delta^\lambda$ имеем $c'A\delta^{\lambda'}$, где λ' произвольное число $0 < \lambda' < 1$.

§ 4. О нормальной производной потенциала простого слоя

В § 1 было доказано, что потенциал простого слоя имеет непрерывные производные по координатам x, y, z точки $m(x, y, z)$, лежащей внутри (D_i) или внутри (D_e) . Проведем

нормаль N_0 в точке m_0 поверхности (S) и вычислим эти производные в точке m_1 этой нормали (рис. 19)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_{(S)} \mu \frac{\xi - x_1}{r_{21}^3} d\sigma = \int_{(S)} \mu \frac{\cos(r_{21}x)}{r_{21}^2} d\sigma,$$

где x_1, y_1, z_1 означают координаты точки m_1 .

Образует комбинацию

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_{m_1} = \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N_0x) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N_0y) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N_0z) - \\ - \int_{(S)} \mu \frac{\cos(r_{21}x) \cos(N_0x) + \cos(r_{21}y) \cos(N_0y) + \cos(r_{21}z) \cos(N_0z)}{r_{21}^3} d\sigma,$$

что приводит к формуле

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_{m_1} = \int_{(S)} \mu \frac{\cos(r_{21}N_0)}{r_{21}^2} d\sigma. \quad (20)$$

Мы сейчас докажем, что если плотность μ непрерывна, (20) имеет предел, когда точка m_1 стремится к m_0 , оставаясь или внутри (D_i) или внутри (D_e) , причем значения этих пределов, вообще говоря, различны. Обозначим их через

$$\frac{dV_i}{dn} \quad \text{и} \quad \frac{dV_e}{dn}.$$

Будет показано, что интеграл (20) сходится, если точку m_1 заменить точкой m_0 поверхности (S) . При этом получится некоторая функция точки m_0 поверхности (S) . Назовем эту функцию нормальной производной для V и обозначим ее

$$\frac{dV}{dn} = \int_{(S)} \mu \frac{\cos(r_{20}N_0)}{r_{20}^2} d\sigma. \quad (21)$$

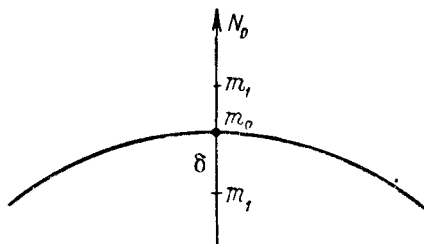


Рис. 19.

После введения функции $\frac{dV}{dn}$ можно доказать равенства:

$$\frac{dV_i}{dn} = \frac{dV}{dn} + 2\pi\mu_0, \quad \frac{dV_e}{dn} = \frac{dV}{dn} - 2\pi\mu_0,$$

в которых μ_0 есть значение μ в точке m_0 .

Эти равенства будут доказаны в § 6. Они дают

$$\frac{dV_i}{dn} - \frac{dV_e}{dn} = 4\pi\mu_0; \quad \frac{dV_i}{dn} + \frac{dV_e}{dn} = 2 \frac{dV}{dn}.$$

Сейчас докажем, что интеграл (21) сходится, если плотность μ ограничена и интегрируема. Как в § 1 (рис. 16), рассмотрим два круговых цилиндра радиусов ρ_1 и ρ_2 ($\rho_2 < \rho_1$) с осью N_0 ; обозначим через (σ_1) и (σ_2) части (S) , вырезанные этими цилиндрами. Для доказательства сходимости интеграла (21) достаточно показать, что интеграл

$$\int_{(\sigma_1 - \sigma_2)} |\mu| \frac{|\cos(r_{20}N_0)|}{r_{20}^2} d\sigma$$

бесконечно мал при бесконечно малом ρ_1 .

В силу неравенства (17) § 1 (I) имеем:

$$|\cos(r_{20}N_0)| < Er_{20}^\lambda.$$

Поэтому, используя цилиндрические координаты, получим:

$$\begin{aligned} \int_{(\sigma_1 - \sigma_2)} |\mu| \frac{|\cos(r_{20}N_0)|}{r_{20}^2} d\sigma &< EA \int_{(\sigma_1 - \sigma_2)} \frac{r_{20}^\lambda}{r_{20}^2} d\sigma < EA \cdot 2 \int_0^{2\pi} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho}{\rho^{2-\lambda}} d\rho d\varphi = \\ &= \frac{4\pi EA}{\lambda} (\rho_1^\lambda - \rho_2^\lambda) < aA\rho_1^\lambda, \end{aligned}$$

что доказывает теорему.

Из последнего неравенства заключаем:

$$\left| \int_{(\sigma_1)} \mu \frac{\cos(r_{20}N_0)}{r_{20}^2} d\sigma \right| < aA\rho_1^\lambda, \quad (22)$$

где a — число, зависящее только от поверхности (S) .

З а м е ч а н и е. Из предыдущих рассуждений можно заключить, что

$$\left| \int_{(S)} \mu \frac{\cos(r_{20}N_0)}{r_{20}^2} d\sigma \right| < aA,$$

где A — верхняя граница для $|\mu|$. Отсюда следует, как и в § 6 (I), что если μ_n равномерно на (S) стремится к пределу μ , то имеем:

$$\lim_{(S)} \int \mu_n \frac{\cos(r_{20}N_0)}{r_{20}^2} d\sigma = \int_{(S)} \mu \frac{\cos(r_{20}N_0)}{r_{20}^2} d\sigma.$$

§ 5. Непрерывность нормальной производной потенциала простого слоя

Теорема. Если плотность μ потенциала простого слоя ограничена и интегрируема, то нормальная производная

$$\frac{dV}{dn} = \int_{(S)} \mu \frac{\cos(r_{20}N_0)}{r_{20}^2} d\sigma$$

является правильно непрерывная функция точки m_0 поверхности (S) .

Пусть δ означает расстояние $m_1 m_0$. Найдем разность значений интеграла (21) в точках m_1 и m_0 :

$$\int_{(S)} \mu \frac{\cos(r_{21}N_1)}{r_{21}^2} d\sigma - \int_{(S)} \mu \frac{\cos(r_{20}N_0)}{r_{20}^2} d\sigma, \quad (23)$$

где N_1 означает нормаль в точке m_1 . Введем сферу Ляпунова с центром в m_0 и преобразуем разность (23):

$$\begin{aligned} \int_{(S-\Sigma)} \mu \frac{\cos(r_{21}N_1)}{r_{21}^2} d\sigma - \int_{(S-\Sigma)} \mu \frac{\cos(r_{20}N_0)}{r_{20}^2} d\sigma + \\ + \int_{(\Sigma)} \mu \frac{\cos(r_{21}N_1)}{r_{21}^2} d\sigma - \int_{(\Sigma)} \mu \frac{\cos(r_{20}N_0)}{r_{20}^2} d\sigma. \end{aligned} \quad (24)$$

Для оценки первой разности в (24) рассмотрим потенциал простого слоя

$$V_1 = \int_{(S-\Sigma)} \mu \frac{1}{r_{21}} d\sigma.$$

Если $r_{10} = \delta < \frac{d}{2}$, то $r_{21} > \frac{d}{2}$, и поэтому потенциал V_1 имеет для указанных точек m_1 непрерывные производные всех

порядков, причем модули потенциала и его первых и вторых производных имеют оценку aA . Первая разность в (24) запишется так:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V_1}{\partial N_1}\right)_{m_1} - \left(\frac{\partial V_1}{\partial N_0}\right)_{m_1} &= \left(\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)_{m_1} \cos(N_1 x) + \dots\right) - \\ &- \left(\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)_{m_1} \cos(N_0 x) + \dots\right) = \cos(N_0 x) \left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)_{m_1} - \left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)_{m_1}\right] + \\ &+ \left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)_{m_1} \{\cos(N_1 x) - \cos(N_0 x)\} + \dots \end{aligned}$$

В силу сказанного об оценках производных V_1 , легко следует, что квадратные скобки меньше чисел вида $aA\delta$. Фигурные скобки оцениваются так:

$$\begin{aligned} |\cos(N_1 x) - \cos(N_0 x)| &= 2 \left| \sin \frac{(N_1 x) + (N_0 x)}{2} \right| \times \\ \times \left| \sin \frac{(N_1 x) - (N_0 x)}{2} \right| &< |(N_1 x) - (N_0 x)| < (N_1 N_0) < Er_{10}^\lambda = E\delta^\lambda. \end{aligned}$$

Поэтому первая разность в (24) меньше числа вида:

$$3aA\delta + 3aAE\delta^\lambda = A\delta^\lambda (3a\delta^{1-\lambda} + 3aE) = bA\delta^\lambda.$$

Остается оценить вторую разность в (24). Для этого рассмотрим часть (σ) поверхности (S) внутри сферы радиуса 2δ с центром в m_0 . Вторая разность в (24) примет вид:

$$\begin{aligned} \int_{(\Sigma-\sigma)} \mu \left\{ \frac{\cos(r_{21}N_1)}{r_{21}^2} - \frac{\cos(r_{20}N_0)}{r_{20}^2} \right\} d\sigma + \\ + \int_{(\sigma)} \mu \frac{\cos(r_{21}N_1)}{r_{21}^2} d\sigma - \int_{(\sigma)} \mu \frac{\cos(r_{20}N_0)}{r_{20}^2} d\sigma, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \left| \int_{(\Sigma)} \mu \frac{\cos(r_{21}N_1)}{r_{21}^2} d\sigma - \int_{(\Sigma)} \mu \frac{\cos(r_{20}N_0)}{r_{20}^2} d\sigma \right| &\leq \\ &\leq \left| \int_{(\Sigma-\sigma)} \mu \left\{ \frac{\cos(r_{21}N_1)}{r_{21}^2} - \frac{\cos(r_{20}N_0)}{r_{20}^2} \right\} d\sigma \right| + \\ + \left| \int_{(\sigma)} \mu \frac{\cos(r_{21}N_1)}{r_{21}^2} d\sigma \right| &+ \left| \int_{(\sigma)} \mu \frac{\cos(r_{20}N_0)}{r_{20}^2} d\sigma \right|. \quad (25) \end{aligned}$$

На основании неравенства (22) последний член в (25) меньше, чем $aA(2\delta)^\lambda$. Если рассмотрим сферу с центром в m_1 и радиусом 3δ , то придем к заключению, что предпоследний член в (25) меньше $aA(3\delta)^\lambda$. Таким образом, сумма двух последних членов в (25) меньше $cA\delta^\lambda$, где c определенное число, зависящее только от поверхности (S) . Оценим теперь первый член правой части (25).

Мы имеем:

$$\frac{\cos(r_{21}N_1)}{r_{21}^2} - \frac{\cos(r_{20}N_0)}{r_{20}^2} = \frac{\cos(r_{21}N_1) - \cos(r_{20}N_0)}{r_{21}^2} + \\ + \cos(r_{20}N_0) \left\{ \frac{1}{r_{21}^2} - \frac{1}{r_{20}^2} \right\}. \quad (26)$$

Сначала будем заниматься вторым слагаемым (26). Для простоты будем считать $\lambda < 1$. Так как вне (τ)

$$\frac{1}{2} r_{20} < r_{21} < \frac{3}{2} r_{20},$$

то

$$\left| \cos(r_{20}N_0) \left\{ \frac{1}{r_{21}^2} - \frac{1}{r_{20}^2} \right\} \right| < Er_{20}^\lambda \frac{|r_{20} - r_{21}| \cdot (r_{20} + r_{21})}{r_{21}^2 r_{20}^2} < \\ < Er_{20}^\lambda \frac{\delta \cdot \frac{5}{2} r_{20}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 r_{20}^4} = b\delta \frac{1}{r_{20}^{3-\lambda}}.$$

Применяя цилиндрические координаты, получим:

$$\left| \int_{(\lambda-\sigma)} \mu \cos(r_{20}N_0) \left\{ \frac{1}{r_{21}^2} - \frac{1}{r_{20}^2} \right\} d\sigma \right| \leq 2Ab\delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{d\rho}{\rho^{2-\lambda}} = \\ = \frac{4\pi b}{1-\lambda} A\delta \left\{ \frac{1}{\delta^{1-\lambda}} - \frac{1}{a^{1-\lambda}} \right\} < \frac{4\pi b}{1-\lambda} A\delta^\lambda.$$

Перейдем к первому слагаемому в (26). Имеем:

$$\cos(r_{21}N_1) - \cos(r_{20}N_0) = \\ = |\cos(r_{21}N_1) - \cos(r_{21}N_0)| + |\cos(r_{21}N_0) - \cos(r_{20}N_0)|. \quad (27)$$

Для первой разности правой части (27), очевидно, имеем:

$$|\cos(r_{21}N_1) - \cos(r_{21}N_0)| < |(r_{21}N_1) - (r_{21}N_0)| < (N_1N_0) < E\delta^\lambda,$$

что приводит к следующей оценке интеграла:

$$\left| \int_{(\Sigma-\sigma)} \mu \frac{\cos(r_{21}N_1) - \cos(r_{21}N_0)}{r_{21}^2} d\sigma \right| < 8AE\delta \int_0^{2\pi} \int_0^d \frac{\rho d\rho}{r_{20}^2} < \\ < 16\pi EA\delta^\lambda \int_0^d \frac{d\rho}{\rho} = 16\pi EA\delta^\lambda \ln \frac{d}{\delta} = aA\delta^\lambda. \quad (28)$$

Изучим теперь последнюю разность в (27). Если z_1 есть аппликата точки m_1 , то

$$\cos(r_{21}N_0) - \cos(r_{20}N_0) = \frac{z - z_1}{r_{21}} - \frac{z}{r_{20}} = \zeta \left(\frac{1}{r_{21}} - \frac{1}{r_{20}} \right) - \frac{z_1}{r_{21}},$$

и для первого слагаемого правой части имеем оценку:

$$|\zeta| \cdot \left| \frac{1}{r_{21}} - \frac{1}{r_{20}} \right| < ar'_{20} \frac{\delta}{r_{20}r_{21}} < 2\delta \frac{1}{r_{20}^{1-\lambda}} < \frac{2a\delta}{\rho^{1-\lambda}},$$

для второго

$$\left| \frac{z_1}{r_{21}} \right| < \frac{a\delta^{1-\lambda}}{\frac{1}{2}r_{20}} < \frac{2a\delta^{1-\lambda}}{\rho}.$$

Для интеграла получаем оценку:

$$\left| \int_{(\Sigma-\sigma)} \mu \frac{\cos(r_{21}N_0) - \cos(r_{20}N_0)}{r_{21}^2} d\sigma \right| < \\ < 4A \cdot 4\pi \cdot 2a\delta \int_0^d \frac{\rho d\rho}{\rho^3} \frac{1}{\lambda} + 4A \cdot 2\pi \cdot 4A\delta^{1+\lambda} \int_0^d \frac{\rho d\rho}{\rho^3} = \\ = \frac{32\pi a}{1-\lambda} A\delta \left\{ \frac{1}{\delta^{1-\lambda}} - \frac{1}{d^{1-\lambda}} \right\} + 32\pi a A\delta^{1+\lambda} \left\{ \frac{1}{\delta} - \frac{1}{d} \right\} < bA\delta^\lambda.$$

Собирая все полученные результаты, убеждаемся, что разность (23) меньше числа вида

$$cA\delta^\lambda,$$

откуда и следует утверждение теоремы. В случае, когда плотность μ правильно непрерывна, можно улучшить полученный результат; в дополнении I будет указано, что в этом случае разность (23) меньше числа вида $cA\delta^\lambda$.

§ 6. Теорема о нормальной производной потенциала простого слоя

Предположим, что точка m_1 лежит внутри (D_i) или внутри (D_e) на нормали к (S) в точке m_0 , на расстоянии δ от точки m_1 .

Теорема. Если плотность потенциала простого слоя непрерывна на (S) и если точка m_1 стремится к точке m_0 , то имеем:

$$\lim \left(\frac{dV}{dn} \right)_{m_1} = \frac{dV_i}{dn} = \frac{dV}{dn} + 2\pi\mu_0,$$

или

$$\lim \left(\frac{dV}{dn} \right)_{m_1} = \frac{dV_e}{dn} = \frac{dV}{dn} - 2\pi\mu_0,$$

смотря по тому, приближается ли точка m_1 к m_0 , оставаясь внутри (D_i) или внутри (D_e) ; здесь μ_0 есть значение μ в точке m_0 .

Добавление. Если μ правильно непрерывна на (S) , т. е. если

$$|\mu - \mu_0| < Ar_0^{\lambda},$$

то имеем, в зависимости от случая,

$$\left| \left(\frac{dV}{dn} \right)_{m_1} - \frac{dV}{dn} - 2\pi\mu_0 \right| < aA\delta^{\lambda},$$

или

$$\left| \left(\frac{dV}{dn} \right)_{m_1} - \frac{dV}{dn} + 2\pi\mu_0 \right| < aA\delta^{\lambda}.$$

Изучим разность

$$\left(\frac{dV}{dn} \right)_{m_1} - \frac{dV}{dn} = \int_{(\dot{S})} \mu \frac{\cos(r_{21}N_0)}{r_{21}^2} d\sigma - \int_{(\tilde{S})} \mu \frac{\cos(r_{20}N_0)}{r_{20}^2} d\sigma.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{(\dot{S})} \mu \frac{\cos(r_{21}N_0)}{r_{21}^2} d\sigma - \int_{(\tilde{S})} \mu \frac{\cos(r_{20}N_0)}{r_{20}^2} d\sigma = \\ &= \left(\int_{(\dot{S})} \mu \frac{\cos(r_{21}N_2)}{r_{21}^2} d\sigma - \int_{(\dot{S})} \mu \frac{\cos(r_{20}N_2)}{r_{20}^2} d\sigma \right) + \\ &+ \left(\int_{(\dot{S})} \mu \frac{\cos(r_{21}N_0) - \cos(r_{21}N_2)}{r_{21}^2} d\sigma - \right. \\ &\quad \left. - \int_{(\tilde{S})} \mu \frac{\cos(r_{20}N_0) - \cos(r_{20}N_2)}{r_{20}^2} d\sigma \right). \quad (29) \end{aligned}$$

Первая разность правой части (29) уже изучалась в § 3 как разность двух значений потенциала двойного слоя. Было установлено, что если μ непрерывна, то эта разность имеет своим пределом $2\pi\mu_0$ или $-2\pi\mu_0$ в зависимости от того, остается ли точка m_1 внутри (D_i) или внутри (D_e) ; если μ правильно непрерывна, то эта разность отличается от своего предела на величину, меньшую, чем $aA\delta^2$.

Для того чтобы закончить доказательство теоремы, достаточно показать, что вторая разность правой части (29) бесконечно мала одновременно с δ . Предполагая лишь ограниченность μ , докажем, что эта разность по абсолютному значению меньше числа вида $aA\delta^2$.

Рассмотрим сферу Ляпунова с центром в m_0 ; пусть (Σ) есть часть (S) внутри этой сферы; тогда упомянутая разность равна:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{(S-\Sigma)} \mu \frac{\cos(r_{21}N_0) - \cos(r_{21}N_2)}{r_{21}^2} d\sigma - \right. \\ & \quad \left. - \int_{(S-\Sigma)} \mu \frac{\cos(r_{20}N_0) - \cos(r_{20}N_2)}{r_{20}^2} d\sigma \right) + \\ & \quad + \left(\int_{(\Sigma)} \mu \frac{\cos(r_{21}N_0) - \cos(r_{21}N_2)}{r_{21}^2} d\sigma - \right. \\ & \quad \left. - \int_{(\Sigma)} \mu \frac{\cos(r_{20}N_0) - \cos(r_{20}N_2)}{r_{20}^2} d\sigma \right). \quad (30) \end{aligned}$$

Если $\delta < \frac{d}{2}$, то первая разность в (30) по модулю меньше числа вида $aA\delta$. В самом деле, функция

$$\int_{(S-\Sigma)} \mu \frac{\cos(r_{21}N_0) - \cos(r_{21}N_2)}{r_{21}^2} d\sigma$$

непрерывна и имеет непрерывные ограниченные производные в окрестности точки m_0 . Остается исследовать вторую разность в (30).

Рассмотрим сферу с центром в m_0 и радиуса 2δ ; обозначим (σ) часть (S) , находящуюся внутри сферы. Тогда разность

может быть написана так:

$$\begin{aligned} \int_{(\Sigma-\sigma)} \mu \left\{ \frac{\cos(r_{21}N_0) - \cos(r_{21}N_2)}{r_{21}^2} - \frac{\cos(r_{20}N_0) - \cos(r_{20}N_2)}{r_{20}^2} \right\} d\sigma + \\ + \int_{(\sigma)} \mu \frac{\cos(r_{21}N_0) - \cos(r_{21}N_2)}{r_{21}^2} d\sigma - \\ - \int_{(\sigma)} \mu \frac{\cos(r_{20}N_0) - \cos(r_{20}N_2)}{r_{20}^2} d\sigma. \quad (31) \end{aligned}$$

Как и в предыдущем параграфе, имеем:

$$\left. \begin{aligned} |\cos(r_{21}N_0) - \cos(r_{21}N_2)| &< (N_0N_2) < Er_{20}^{\lambda}, \\ |\cos(r_{20}N_0) - \cos(r_{20}N_2)| &< (N_0N_2) < Er_{20}^{\lambda}, \\ |\cos(r_{01}N_0) - \cos(r_{01}N_2)| &< (N_0N_2) < Er_{20}^{\lambda}. \end{aligned} \right\}. \quad (32)$$

На основании неравенства (12) § 1 (I), $r_{20} < 2\rho$, где ρ проекция r_{20} на касательную плоскость в точке m_0 . Поэтому каждая из двух последних разностей меньше $2^{\lambda}Er^{\lambda}$. Так как ρ есть также проекция r_{21} на касательную плоскость, то имеем $r_{20} > \rho$, $r_{21} > \rho$, и каждый из двух последних интегралов (31) меньше

$$A \cdot 2^{\lambda}E \cdot 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\delta} \frac{\rho d\rho}{\rho^{2-\lambda}} d\varphi = 4\pi \cdot 2^{\lambda}E \cdot A \int_0^{2\delta} \frac{d\rho}{\rho^{1-\lambda}} = \frac{4\pi \cdot 4^{\lambda}E}{\lambda} A\delta^{\lambda}.$$

Таким образом, осталось изучить первый из интегралов (31). Применяя преобразование, использованное нами в § 3, мы получим для точки m_1 , находящейся где угодно на расстоянии δ от m_0 ,

$$\begin{aligned} K &= \frac{\cos(r_{21}N_0) - \cos(r_{21}N_2)}{r_{21}^2} - \frac{\cos(r_{20}N_0) - \cos(r_{20}N_2)}{r_{20}^2} = \\ &= \frac{r_{21} \cos(r_{21}N_0) - r_{21} \cos(r_{21}N_2)}{r_{21}^3} - \\ &\quad - \frac{r_{20} \cos(r_{20}N_0) - r_{20} \cos(r_{20}N_2)}{r_{20}^3} = \\ &= \frac{[r_{21} \cos(r_{21}N_0) - r_{20} \cos(r_{20}N_0)] - \\ &\quad - [r_{21} \cos(r_{21}N_2) - r_{20} \cos(r_{20}N_2)]}{r_{21}^3} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + |r_{20} \cos(r_{20} N_0) - r_{20} \cos(r_{20} N_2)| \left\{ \frac{1}{r_{21}^3} - \frac{1}{r_{20}^3} \right\} = \\
 & = \frac{r_{01} \cos(r_{01} N_1) - r_{01} \cos(r_{01} N_2)}{r_{21}^3} + r_{20} [\cos(r_{20} N_0) - \cos(r_{20} N_2)] \times \\
 & \quad \times \frac{(r_{20} - r_{21})(r_{20}^2 + r_{20} r_{21} + r_{21}^2)}{r_{20}^3 r_{21}^3} = \\
 & = \frac{\delta [\cos(r_{01} N_0) - \cos(r_{01} N_2)]}{r_{21}^3} + [\cos(r_{20} N_0) - \cos(r_{20} N_2)] \times \\
 & \quad \times (r_{20} - r_{21}) \left(\frac{1}{r_{21}^3} + \frac{1}{r_{20} r_{21}^2} + \frac{1}{r_{20}^2 r_{21}} \right),
 \end{aligned}$$

так как r_{21} есть геометрическая сумма векторов r_{20} и r_{01} .

Учитывая второе и третье неравенства (32), а также тот факт, что на $(\Sigma - \sigma)$ $r_{21} > \frac{r_{20}}{2}$, получим:

$$|K| < \frac{\delta E r_{20}^2}{\left(\frac{1}{2} r_{20}\right)^3} + \frac{14 E r_{20}^2 \delta}{r_{20}^3} = c \frac{\delta}{r_{20}^{3-\lambda}} < c \frac{\delta}{\rho^{3-\lambda}},$$

и для первого интеграла в (31) имеем оценку

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{(\Sigma - \sigma)} \mu K d\tau \right| & < c A \cdot 2\delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\rho d\rho}{\rho^{3-\lambda}} = \\
 & = \frac{4\pi c}{1-\lambda} A \delta \left\{ \frac{1}{\delta^{1-\lambda}} - \frac{1}{a^{1-\lambda}} \right\} < b A \delta^\lambda.
 \end{aligned}$$

Из полученных неравенств следует доказательство теоремы.

§ 7. О производных потенциала простого слоя

Приведем пример потенциала простого слоя с непрерывной плотностью и имеющего неограниченные производные.

Пусть круг в плоскости xOy радиуса $R < 1$ с центром в начале координат является частью замкнутой поверхности Ляпунова (S). Тогда поведение в достаточно малой окрестности начала координат потенциала простого слоя, распро-

ограниченного по \$(S)\$ с плотностью \$\mu\$, зависит от поведения в той же окрестности интеграла

$$\int_{\xi^2 + \eta^2 \leq R^2} \int \frac{\mu(\xi, \eta)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}} d\xi d\eta,$$

так как интеграл по оставшейся части \$(S)\$ имеет непрерывные производные любого порядка в окрестности начала координат.

Положим в указанном круге

$$\mu(\xi, \eta) = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} |\ln \sqrt{\xi^2 + \eta^2}|}$$

\$\mu(\xi, \eta)\$ непрерывна и стремится к нулю, если \$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \rightarrow 0\$.

Вычисляя в точке \$m_1(0, 0, z)\$, \$|z| > 0\$ производную по \$x\$ от интеграла, получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\xi^2 + \eta^2 \leq R^2} \int \frac{\xi \cdot \xi d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} |\ln \sqrt{\xi^2 + \eta^2}| \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + z^2}} = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{|\ln \rho| \cdot (\sqrt{\rho^2 + z^2})^3} = \pi \int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{|\ln \rho| (\sqrt{\rho^2 + z^2})^3} \end{aligned}$$

Последний интеграл возрастает при убывании \$|z|\$. Покажем, что он возрастает неограниченно. Действительно пусть \$\delta > 0\$ (\$\delta < R\$) произвольное число. Тогда

$$\int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{|\ln \rho| (\sqrt{\rho^2 + z^2})^3} > \int_\delta^R \frac{\rho^2 d\rho}{|\ln \rho| \cdot (\sqrt{\rho^2 + z^2})^3}.$$

Но при \$|z| \rightarrow 0\$

$$\int_\delta^R \frac{\rho^2 d\rho}{|\ln \rho| (\sqrt{\rho^2 + z^2})^3} \rightarrow \int_\delta^R \frac{d\rho}{\rho |\ln \rho|} = \ln \left| \frac{\ln \delta}{\ln R} \right|$$

и, следовательно, при достаточно малом \$|z|\$ интеграл слева будет больше \$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\ln \delta}{\ln R} \right|\$, а поэтому при том же значении \$|z|\$

$$\int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{|\ln \rho| (\sqrt{\rho^2 + z^2})^3} > \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\ln \delta}{\ln R} \right|.$$

Ввиду произвольности δ следует, что интеграл слева неограниченно возрастает. Этим показано, что производная по x потенциала простого слоя с непрерывной плотностью неограничена.

Ляпунову принадлежит следующая теорема.

Теорема. Если плотность μ потенциала простого слоя правильно непрерывна на (S) , то производные

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \int_{(S)} \mu \frac{\xi - x_1}{r_{21}^3} d\sigma, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \int_{(S)} \mu \frac{\eta - y_1}{r_{21}^3} d\sigma, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= \int_{(S)} \mu \frac{\zeta - z_1}{r_{21}^3} d\sigma, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

рассматриваемые как функции точки $m_1(x_1, y_1, z_1)$, правильно непрерывны внутри (D_i) и внутри (D_e) .

Несколько громоздкое доказательство этой теоремы помещено в дополнении. Сейчас, считая теорему справедливой, сделаем некоторые выводы.

На основании теоремы § 2 (I) заключаем, что производные (33) имеют определенные пределы при стремлении точки m_1 к точке m_0 поверхности (S) и эти пределы сами суть правильно непрерывные функции точки m_0 . Обозначим эти пределы через

$$\frac{\partial V_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_i}{\partial z}, \quad \frac{\partial V_e}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_e}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_e}{\partial z},$$

где индексы i, e указывают на область, в которой находится точка m_1 .

Когда точка m_1 пересекает (S) , производные испытывают скачки. Теорема § 3 (I) позволяет найти значения этих скачков. Действительно, $\frac{\partial V_i}{\partial x}$ и $\frac{\partial V_e}{\partial x}$, будучи значениями производных двух функций, определенных одна в (D_i) , другая в (D_e) и совпадающих на (S) , удовлетворяют следующему равенству:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} - \frac{\partial V_e}{\partial x} = \cos(N_0 x) \left(\frac{dV_i}{dn} - \frac{dV_e}{dn} \right) = 4\pi\mu_0 \cos(N_0 x).$$

Аналогично

$$\frac{\partial V_i}{\partial y} - \frac{\partial V_e}{\partial y} = 4\pi\mu_0 \cos(N_0 y),$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial z} - \frac{\partial V_e}{\partial z} = 4\pi\mu_0 \cos(N_0 z).$$

§ 8. Производные потенциала простого слоя с дифференцируемой плотностью

Предположим, что μ , рассматриваемая как функция точки $m_2(\xi, \eta, \zeta)$ поверхности (S) , допускает образование комбинаций

$$\mathcal{D}_\xi \mu, \mathcal{D}_\eta \mu, \mathcal{D}_\zeta \mu.$$

Предположим, кроме того, что поверхность (S) имеет непрерывные элементы кривизны; это значит, что можно образовать комбинации

$$\mathcal{D}_\xi \cos(N_2 x), \mathcal{D}_\eta \cos(N_2 y), \mathcal{D}_\zeta \cos(N_2 z)$$

и эти комбинации непрерывны.

Рассмотрим интеграл

$$V = \int_{(\Sigma)} \mu \frac{d\sigma}{r_{20}},$$

где (Σ) — некоторая часть поверхности (S) , ограниченная контуром (l) .

Если точка $m_0(x, y, z)$ не на (Σ) , то имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \int_{(\Sigma)} \mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{20}} d\sigma = - \int_{(\Sigma)} \mu \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r_{20}} = \\ &= - \int_{(\Sigma)} \mu \mathcal{D}_\xi \frac{1}{r_{20}} d\sigma + \int_{(\Sigma)} \mu \cos(N_2 x) \frac{\cos(r_{20} N_2)}{r_{20}^3} d\sigma, \quad (34) \end{aligned}$$

так как

$$\mathcal{D}_\xi \frac{1}{r_{20}} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r_{20}} - \cos(N_2 x) \frac{d}{dn_2} \frac{1}{r_{20}} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r_{20}} + \cos(N_2 x) \cdot \frac{\cos(r_{20} N_2)}{r_{20}^3}.$$

Последний интеграл в (34) не будем преобразовывать. Подинтегральную функцию первого интеграла запишем в виде:

$$\mu \mathcal{D}_{\xi} \frac{1}{r_{20}} = \mathcal{D}_{\xi} \left(\frac{\mu}{r_{20}} \right) - \frac{1}{r_{20}} \mathcal{D}_{\xi} \mu$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} = \int_{(\Sigma)} \mu \cos(N_2 x) \frac{\cos(r_{20} N_2)}{r_{20}^3} d\sigma + \\ + \int_{(\Sigma)} \frac{\mathcal{D}_{\xi} \mu}{r_{20}} d\sigma - \int_{(\Sigma)} \mathcal{D}_{\xi} \left(\frac{\mu}{r_{20}} \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (35)$$

Займемся лишь преобразованием последнего интеграла. Для краткости записи введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mu \frac{1}{r_{20}} = f(\xi, \tau, \zeta) = f; \quad \cos(N_2 x) = \alpha, \quad \cos(N_2 y) = \beta, \\ \cos(N_2 z) = \gamma. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2} \mathcal{D}_{\xi} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \alpha \mathcal{D}_{\xi} \alpha + \beta \mathcal{D}_{\xi} \beta + \gamma \mathcal{D}_{\xi} \gamma = 0,$$

получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\xi} f = \mathcal{D}_{\xi} [\alpha(\tau f) + \beta(\beta f) + \gamma(\gamma f)] = \\ = \alpha \mathcal{D}_{\xi} (f\alpha) + \beta \mathcal{D}_{\xi} (f\beta) + \gamma \mathcal{D}_{\xi} (f\gamma). \end{aligned}$$

Имея в виду использование формулы Стокса, положим:

$$\varphi = 0, \quad \psi = f\gamma, \quad \chi = -f\beta.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \alpha \mathcal{D}_{\xi} (f\alpha) + \beta \mathcal{D}_{\xi} (f\beta) + \gamma \mathcal{D}_{\xi} (f\gamma) = \\ = \alpha [\mathcal{D}_{\eta} \chi - \mathcal{D}_{\zeta} \psi] + \beta [\mathcal{D}_{\zeta} \varphi - \mathcal{D}_{\xi} \chi] + \\ + \gamma [\mathcal{D}_{\xi} \psi - \mathcal{D}_{\eta} \varphi] + \alpha [\mathcal{D}_{\xi} (\tau f) + \mathcal{D}_{\eta} (\beta f) + \mathcal{D}_{\zeta} (\gamma f)]. \end{aligned}$$

Применяя формулу Стокса, получим:

$$\begin{aligned} \int_{(\Sigma)} \left(\frac{\mu}{r_{20}} \right) d\sigma = \int_{(\Gamma)} \mu \frac{\cos(Nz) d\eta - \cos(Ny) d\zeta}{r_{20}} + \\ + \int_{(\Sigma)} \gamma [\mathcal{D}_{\xi} (\tau f) + \mathcal{D}_{\eta} (\beta f) + \mathcal{D}_{\zeta} (\gamma f)] d\sigma. \end{aligned} \quad (36)$$

Введем обозначение

$$K = \mathcal{D}_\xi \alpha + \mathcal{D}_\eta \beta + \mathcal{D}_z \gamma.$$

Как было отмечено в § 3 (I), K равно средней кривизне поверхности.

Как было доказано в § 3 (I), для любой функции f

$$\alpha \mathcal{D}_\xi f + \beta \mathcal{D}_\eta f + \gamma \mathcal{D}_z f = 0,$$

и поэтому сумма под знаком последнего интеграла в (36) принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\xi(\alpha f) + \mathcal{D}_\eta(\beta f) + \mathcal{D}_z(\gamma f) &= (\alpha \mathcal{D}_\xi f + \beta \mathcal{D}_\eta f + \gamma \mathcal{D}_z f) + \\ &+ f(\mathcal{D}_\xi \alpha + \mathcal{D}_\eta \beta + \mathcal{D}_z \gamma) = fK = \frac{\omega}{r_{20}} K. \end{aligned} \quad (37)$$

Учитывая (35), (36) и (37), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \int_{(\Sigma)} [\mathcal{D}_\xi \mu - \mu K \cos(Nx)] \frac{d\sigma}{r_{20}} + \int_{(\Sigma)} \mu \cos(Nx) \frac{\cos(r_{20}N)}{r_{20}^2} d\sigma + \\ &+ \int_{(i)} \mu \frac{\cos(Ny) \cos(Nz) - \cos(Nz) d\eta}{r_{20}}. \end{aligned} \quad (38)$$

Производные $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ получаются круговой перестановкой букв x , y , z и ξ , η , ζ . Если поверхность замкнута, последний член в (38) отсутствует.

§ 9. Нормальная производная потенциала двойного слоя

Для того чтобы существовала нормальная производная потенциала двойного слоя, плотность μ этого слоя должна удовлетворять условиям, более строгим, чем встречавшимся до сих пор.

Следующий пример, принадлежащий Ляпунову, показывает, что правильная непрерывность плотности недостаточна для существования производной. Предположим, что часть (Σ) поверхности (S) плоска и что (Σ) есть круг с центром в точке m_0 . Мы положим на (Σ)

$$\mu = K\rho,$$

где ρ — расстояние точки на (Σ) до m_0 . Если m_1 и m_2 две точки на (Σ) , расстояние между которыми есть r , то имеем:

$$|\mu_{m_1} - \mu_{m_2}| = K |\rho_2 - \rho_1| < Kr$$

и, следовательно, μ правильно непрерывна, причем число λ равно единице.

Имеем

$$W = \int_{(\Sigma)} \mu \frac{\cos(rN)}{r^2} d\sigma + \int_{(S-\Sigma)} \mu \frac{\cos(rN)}{r^2} d\sigma.$$

Так как второй член имеет производные любого порядка в окрестности точки m_0 , то займемся исключительно первым.

Возьмем за ось Oz нормаль к (Σ) . Для точки $m_1(0, 0, z)$ на нормали к (Σ) в m_0 имеем:

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + z^2 = \rho^2 + z^2, \quad \cos(rN) = \frac{z}{r}$$

и

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{(\Sigma)} \mu \frac{\cos(rN)}{r^2} d\sigma = Kz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^d \frac{\rho^2 d\rho}{(V\rho^2 + z^2)^3} = \\ &= 2\pi Kz \int_0^d \frac{d\rho}{V\rho^2 + z^2} - 2\pi Kz^3 \int_0^d \frac{d\rho}{(V\rho^2 + z^2)^3} = \\ &= 2\pi Kz \log(d + \sqrt{d^2 + z^2}) - 2\pi Kz \log|z| - 2\pi Kz \frac{d}{\sqrt{d^2 + z^2}}. \end{aligned}$$

Первый и третий члены в выражении W_1 имеют производные по z , стремящиеся к определенным конечным пределам, когда z стремится к нулю; производная второго слагаемого равна

$$-2\pi K \log|z| - 2\pi K$$

и возрастает неограниченно, когда z стремится к нулю.

Мы в последующем не будем пользоваться нормальными производными потенциала двойного слоя. Здесь только формулируем без доказательства теоремы, принадлежащие Ляпунову, придав им немного более общую форму; доказательство теорем находится в дополнении.

Теорема 1. Если выполнено одно из следующих условий:

1°. μ непрерывна на (S) и $(N_1 N_2) < Er_{21}$ (N_1 и N_2 нормали к (S) в точках m_1 и m_2 , расстояние между которыми есть r_{21}) или

2°. $|\mu_{m_1} - \mu_{m_2}| < Er_{21}$, $(N_1 N_2) < Er_{21}^\lambda$ ($0 < \lambda \leq 1$) и если потенциал двойного слоя

$$W = \int_{(\bar{S})} \mu \frac{\cos(r_{20} N)}{r_{20}^2} d\tau$$

обладает одной из производных

$$\frac{dW_i}{dn}, \quad \frac{dW_e}{dn},$$

он обладает и другой, и, кроме того, имеем:

$$\frac{dW_i}{dn} = \frac{dW_e}{dn}.$$

Выберем точку поверхности m_0 началом цилиндрической системы координат, направив ось Oz по нормали в точке m_0 . Пусть (Σ) есть часть (S) внутри сферы Ляпунова с центром в m_0 . Известно, что (Σ) пересекается каждой прямой, параллельной Oz , не более одного раза. Пусть на (Σ) задана функция $\mu(m)$, где m точка (Σ) . Мы положим $\mu(\rho, \varphi) = \mu(m)$, где ρ, φ первые две координаты точки m . Значение μ в m_0 обозначим μ_0 .

Неравенство

$$\left| \int_0^{2\pi} |\mu(\rho, \varphi) - \mu_0| d\varphi \right| < a\rho^{1+\nu}, \quad (a > 0, \nu > 0)$$

называется условием Ляпунова.

Теорема 2. Если выполнено одно из двух условий теоремы 1 и условие Ляпунова, то потенциал двойного слоя имеет нормальные производные.

§ 10. Производные потенциала двойного слоя с дифференцируемой плотностью

Пусть (Σ) есть часть поверхности (S) , удовлетворяющей условиям Ляпунова. Пусть (l) контур (Σ) .

Рассмотрим интеграл

$$W = \int_{(\Sigma)} \mu \frac{\cos(r_{20} N)}{r_{20}^2} d\tau.$$

Предположим плотность μ дифференцируемой по (S) ; следовательно, можно образовать комбинации

$$\mathcal{D}_\xi \mu, \quad \mathcal{D}_\eta \mu, \quad \mathcal{D}_\zeta \mu.$$

Если точка $m_0(x, y, z)$ не лежит на (Σ) , мы имеем:

$$W = \int_{(\Sigma)} \mu \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r_{20}}}{\partial x} \cos(Nx) + \frac{\partial \frac{1}{r_{20}}}{\partial y} \cos(Ny) + \frac{\partial \frac{1}{r_{20}}}{\partial z} \cos(Nz) \right\} d\sigma,$$

откуда следует:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \int_{(\Sigma)} \mu \left\{ \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{20}}}{\partial x^2} \cos(Nx) + \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{20}}}{\partial x \partial y} \cos(Ny) + \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{20}}}{\partial x \partial z} \cos(Nz) \right\} d\sigma = \\ &= \int_{(\Sigma)} \mu \left\{ \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{20}}}{\partial \xi^2} \cos(Nx) - \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{20}}}{\partial \xi \partial \eta} \cos(Ny) + \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{20}}}{\partial \xi \partial \zeta} \cos(Nz) \right\} d\sigma. \quad (39) \end{aligned}$$

Для краткости введем следующие обозначения

$$\frac{1}{r_{20}} = f(\xi, \eta, \zeta) = f, \quad \cos(Nx) = \alpha, \quad \cos(Ny) = \beta, \quad \cos(Nz) = \gamma.$$

Имеем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} = 0,$$

а в силу определения \mathcal{D}_ξ , \mathcal{D}_η , \mathcal{D}_ζ для любой функции f справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \beta \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} - \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} &= \beta \mathcal{D}_\xi \frac{\partial f}{\partial \eta} - \alpha \mathcal{D}_\eta \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \gamma \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \zeta} - \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} &= \gamma \mathcal{D}_\xi \frac{\partial f}{\partial \zeta} - \alpha \mathcal{D}_\zeta \frac{\partial f}{\partial \zeta}. \end{aligned}$$

Поэтому фигурная скобка в последнем интеграле равенства (39) преобразуется как

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \zeta} &= \\ &= \left[\beta \mathcal{D}_\xi \frac{\partial f}{\partial \eta} + \gamma \mathcal{D}_\xi \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right] - \alpha \left[\mathcal{D}_\eta \frac{\partial f}{\partial \eta} + \mathcal{D}_\zeta \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right]. \end{aligned}$$

Подинтегральная функция в (39) отличается от полученного выражения множителем μ . Воспользовавшись тем, что

$$\mu \mathcal{D}_\xi \frac{\partial f}{\partial \eta} = \mathcal{D}_\xi \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial f}{\partial \eta} \mathcal{D}_\xi \mu,$$

и аналогичными равенствами, преобразуем подинтегральную функцию интеграла (39) к виду:

$$\begin{aligned} & \left\{ \alpha \left[\mathcal{D}_\eta \left(-\mu \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) - \mathcal{D}_\zeta \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right) \right] - \beta \left[\mathcal{D}_\zeta 0 - \mathcal{D}_\xi \left(-\mu \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \gamma \left[\mathcal{D}_\xi \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right) - \mathcal{D}_\eta 0 \right] \right\} + \frac{\partial f}{\partial \eta} (\alpha \mathcal{D}_\eta \mu - \beta \mathcal{D}_\xi \mu) + \\ & \quad + \frac{\partial f}{\partial \zeta} (\alpha \mathcal{D}_\zeta \mu - \gamma \mathcal{D}_\xi \mu). \quad (40) \end{aligned}$$

В силу формулы Стокса интеграл по (Σ) от фигурной скобки преобразуется в интеграл по контуру l :

$$\int_{(l)} \mu \frac{\partial f}{\partial \zeta} d\eta - \mu \frac{\partial f}{\partial \eta} d\zeta = \int_{(l)} \mu \left\{ -\frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r_{20}} d\eta - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r_{20}} d\zeta \right\}.$$

Так как

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial r_1} \frac{1}{r_{20}} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r_{20}},$$

то

$$\int_{(\Sigma)} \frac{\partial f}{\partial \eta} (\alpha \mathcal{D}_\eta \mu - \beta \mathcal{D}_\xi \mu) d\sigma = -\frac{\partial}{\partial y} \int_{(\Sigma)} \frac{\cos(Nx) \mathcal{D}_\eta \mu - \cos(Ny) \mathcal{D}_\xi \mu}{r_{20}} d\sigma.$$

Аналогично образуется интеграл от $\frac{\partial f}{\partial \zeta} (\alpha \mathcal{D}_\zeta \mu - \gamma \mathcal{D}_\xi \mu)$.

В результате интегрирования (40) по (Σ) , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{(\Sigma)} \frac{\cos(Ny) \mathcal{D}_\xi \mu - \cos(Nx) \mathcal{D}_\eta \mu}{r_{20}} d\sigma + \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \int_{(\Sigma)} \frac{\cos(Nz) \mathcal{D}_\xi \mu - \cos(Nx) \mathcal{D}_\zeta \mu}{r_{20}} d\sigma + \\ & \quad + \int_{(l)} \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r_{20}} d\eta - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r_{20}} d\zeta \right\}. \quad (41) \end{aligned}$$

Формулы для $\frac{\partial W}{\partial y}$ и $\frac{\partial W}{\partial z}$ получаются круговой перестановкой x, y, z и ξ, η, ζ .

Если поверхность замкнутая, то отсутствует криволинейный интеграл, т. е. имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{(S)} \frac{\cos(Ny) \mathcal{D}_{\xi} \mu - \cos(Nx) \mathcal{D}_{\eta} \mu}{r_{20}} d\sigma + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \int_{(S)} \frac{\cos(Nz) \mathcal{D}_{\xi} \mu - \cos(Nx) \mathcal{D}_{\zeta} \mu}{r_{20}} d\sigma. \quad (42) \end{aligned}$$

Допустим, что $\mathcal{D}_{\xi} \mu, \mathcal{D}_{\eta} \mu, \mathcal{D}_{\zeta} \mu$ правильно непрерывны на (S) . Тогда $\cos(Ny) \mathcal{D}_{\xi} \mu - \cos(Nx) \mathcal{D}_{\eta} \mu$ также правильно непрерывна и, следовательно, потенциал простого слоя с такой плотностью имеет в (D_i) и (D_e) правильно непрерывные производные. Из (42) следует, что производные потенциала двойного слоя с плотностью μ , для которой $\mathcal{D}_{\xi} \mu, \mathcal{D}_{\eta} \mu, \mathcal{D}_{\zeta} \mu$ правильно непрерывны, имеют в (D_i) и в (D_e) правильно непрерывные первые производные.

Если воспользоваться тем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \eta} (\alpha \mathcal{D}_{\eta} \mu - \beta \mathcal{D}_{\xi} \mu) + \frac{\partial f}{\partial \zeta} (\alpha \mathcal{D}_{\zeta} \mu - \gamma \mathcal{D}_{\xi} \mu) = \\ = \alpha \left[\frac{\partial f}{\partial \xi} \mathcal{D}_{\xi} \mu + \frac{\partial f}{\partial \eta} \mathcal{D}_{\eta} \mu + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \mathcal{D}_{\zeta} \mu \right] - \left[\alpha \frac{\partial f}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial f}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right] \mathcal{D}_{\xi} \mu \end{aligned}$$

и

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial f}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \zeta} = - \frac{\cos(r_{20} N)}{r_{20}^2},$$

то вместо формулы (42) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \int_{(S)} \frac{\cos(Nx) \mathcal{D}_{\xi} \mu}{r_{20}} d\sigma - \frac{\partial}{\partial y} \int_{(S)} \frac{\cos(Ny) \mathcal{D}_{\eta} \mu}{r_{20}} d\sigma - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \int_{(S)} \frac{\cos(Nx) \mathcal{D}_{\zeta} \mu}{r_{20}} d\sigma + \int_{(S)} \mathcal{D}_{\xi} \mu \frac{\cos(r_{20} N)}{r_{20}^2} d\sigma. \quad (43) \end{aligned}$$

Вспоминая формулы § 7, найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_i}{\partial x} - \frac{\partial W_e}{\partial x} = -4\pi \cos^2(Nx) \mathcal{D}_x \mu - 4\pi \cos(Nx) \cos(Ny) \mathcal{D}_y \mu - \\ - 4\pi \cos(Nx) \cos(Nz) \mathcal{D}_z \mu + 4\pi \mathcal{D}_x \mu, \end{aligned}$$

и так как

$$\cos(Nx) \mathcal{D}_x \mu + \cos(Ny) \mathcal{D}_y \mu + \cos(Nz) \mathcal{D}_z \mu = 0,$$

находим окончательно

$$\frac{\partial W_i}{\partial x} - \frac{\partial W_e}{\partial x} = 4\pi \mathcal{D}_x \mu.$$

Аналогично находим:

$$\frac{\partial W_i}{\partial y} - \frac{\partial W_e}{\partial y} = 4\pi \mathcal{D}_y \mu, \quad \frac{\partial W_i}{\partial z} - \frac{\partial W_e}{\partial z} = 4\pi \mathcal{D}_z \mu.$$

Из трех последних формул непосредственно следует:

$$\begin{aligned} \frac{dW_i}{dn} - \frac{dW_e}{dn} = 4\pi [\cos(Nx) \mathcal{D}_x \mu + \cos(Ny) \mathcal{D}_y \mu + \\ + \cos(Nz) \mathcal{D}_z \mu] = 0. \end{aligned}$$

§ 11. О сходимости некоторых интегралов

Докажем сходимость следующих интегралов, имеющих отношение к ньютонову потенциалу:

$$\int_{(D)} \frac{d\tau}{r_{20}}, \quad \int_{(D)} \frac{d\tau}{r_{20}^2}, \quad \int_{(D)} \frac{|\mu - \mu_0|}{r_{20}^3} d\tau, \quad |\mu - \mu_0| < Ar_{20}^\lambda.$$

Интегралы берутся по конечной области (D) ; r_{20} означает расстояние точки $m_0(x, y, z)$ до точки $m_2(\xi, \eta, \zeta)$ интегрирования.

Опишем вокруг точки m_0 две сферы радиусов δ_1 и δ_2 ($\delta_1 < \delta_2$) и пусть δ есть область, ограниченная этими сферами. Для доказательства сходимости указанных интегралов достаточно проверить, что соответствующие интегралы, взятые по (δ) , бесконечно малы, когда δ_2 стремится к нулю.

Введем сферические координаты, приняв точку m_0 за полюс:

$$\xi - x_0 = \rho \sin \theta \cos \varphi,$$

$$\eta - y_0 = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad (0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

$$\zeta - z_0 = \rho \cos \theta.$$

Мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \int_{(\delta)} \frac{d\tau}{r_{20}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi}{\rho} = 4\pi \cdot \frac{1}{2} (\delta_2^2 - \delta_1^2) < 2\pi\delta_2^2, \\ \int_{(\delta)} \frac{d\tau}{r_{20}^2} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi}{\rho^2} = 4\pi (\delta_2 - \delta_1) < 4\pi\delta_2, \\ \int_{(\delta)} \frac{|\mu - \mu_0|}{r_{20}^3} d\tau &< A \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi}{\rho^{3-\lambda}} = \frac{4\pi A}{\lambda} (\delta_2^\lambda - \delta_1^\lambda) < \frac{4\pi A}{\lambda} \delta_2^\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Это доказывает, что интегралы сходятся. Обозначая через (δ_2) шар с центром в m_0 и радиуса δ_2 , имеем:

$$\left. \begin{aligned} \int_{(\delta_2)} \frac{d\tau}{r_{20}} &= 2\pi\delta_2^2, \\ \int_{(\delta_2)} \frac{d\tau}{r_{20}^2} &= 4\pi\delta_2, \\ \int_{(\delta_2)} \frac{|\mu - \mu_0|}{r_{20}^3} d\tau &< A\delta_2^\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

§ 12. О ньютоновом потенциале

Пусть (D) конечная область, а μ функция, интегрируемая по этой области.

Интеграл

$$P = \int_{(D)} \frac{\mu d\tau}{r_{20}}, \quad (46)$$

рассматриваемый как функция точки $m_0(x, y, z)$, называется ньютоновым потенциалом. Очевидно, что для точек вне (D) , P обладает всеми производными по x, y, z , причем P стремится к нулю как первая степень, а $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}$ как вторая степень $\frac{1}{R}$, где R расстояние точки m_0 до некоторой фиксированной точки пространства. Кроме того, в каждой

точке, не принадлежащей (D) или границе (D), имеем:

$$\Delta P = \int_{(D)} \mu \cdot \Delta \frac{1}{r_{20}} d\tau = 0,$$

а это значит, что P есть гармоническая функция во всякой области, лежащей вместе с границей вне (D). Первое из неравенств (44) показывает, что интеграл (46) сходится, если плотность μ ограничена и интегрируема. В самом деле, употребляя обозначения § 11, имеем:

$$\left| \int_{(\partial)} \mu \frac{d\tau}{r_{20}} \right| < A \int_{(\partial)} \frac{d\tau}{r_{20}} \leq 2\pi A \delta_2^2 \rightarrow 0, \quad \text{если } \delta_2 \rightarrow 0.$$

Вычислим значение P в случае, когда область (D) есть шар и плотность μ постоянна; положим $\mu = 1$.

Очевидно, что в этом случае P зависит лишь от расстояния a точки m_0 до центра шара и не зависит от направления прямой, соединяющей m_0 с центром шара. Поль-

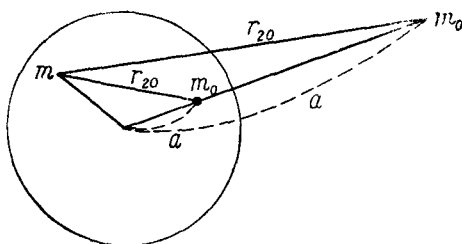


Рис. 20.

зуясь этим, поместим начало координат в центр шара, а ось $O\xi$ направим через m_0 .

Введем сферические координаты:

$$\xi = \rho \sin \theta \cos \varphi,$$

$$\eta = \rho \sin \theta \sin \varphi,$$

$$\zeta = \rho \cos \theta.$$

Замечая, что для такого выбора системы координат θ есть угол между $O m_2$ и $O m_0$ (рис. 20), получаем:

$$r_{20} = \sqrt{\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \theta}. \quad (47)$$

Если R есть радиус шара, то имеем:

$$P = \int_{(D)} \frac{d\tau}{r_{20}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{\rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi}{r_{20}}.$$

Взяв ρ , r_{20} , φ в качестве переменных интегрирования и замечая, что

$$\frac{\mathcal{D}(\rho, r_{20}, \varphi)}{\mathcal{D}(\rho, \theta, \varphi)} = \frac{\rho a \sin \theta}{r_{20}}; \quad \frac{\mathcal{D}(\rho, \theta, \varphi)}{\mathcal{D}(\rho, r_{20}, \varphi)} = \frac{r_{20}}{\rho a \sin \theta},$$

получим:

$$P = \frac{1}{a} \int_0^R \int_{|a-\rho|}^{a+\rho} \int_0^{2\pi} \rho \, d\varphi \, dr_{20} \, d\rho = \frac{2\pi}{a} \int_0^R \rho [(a+\rho) - |a-\rho|] \, d\rho.$$

Если m_0 вне шара (D) , то $a > \rho$ и

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\pi}{a} \int_0^R \rho [(a+\rho) - (a-\rho)] \, d\rho = \frac{2\pi}{a} \int_0^R 2\rho^2 \, d\rho = \\ &= \frac{4\pi}{a} \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Если m_0 внутри сферы, то $|a-\rho| = a-\rho$, когда $\rho < a$, и $|a-\rho| = \rho-a$, когда $\rho > a$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\pi}{a} \left\{ \int_0^a \rho [(a+\rho) - (a-\rho)] \, d\rho + \int_a^R \rho [(a+\rho) - (\rho-a)] \, d\rho \right\} = \\ &= \frac{2\pi}{a} \left[\int_0^a 2\rho^2 \, d\rho + 2a \int_a^R \rho \, d\rho \right] = \frac{2\pi}{a} \left[\frac{2}{3} a^3 + 2a \left(\frac{R^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{2\pi}{a} \left[aR^2 - \frac{a^3}{3} \right] = 2\pi \left(R^2 - \frac{a^2}{3} \right). \end{aligned}$$

Итак, окончательно

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \frac{1}{a}, & \text{если } m_0 \text{ в } (D_e), \\ P &= 2\pi R^2 - \frac{2\pi}{3} a^2, & \text{если } m_0 \text{ в } (D_i). \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Пользуясь формулами (48), без труда находим, что потенциал и его первые производные непрерывны во всем пространстве.

Как будет видно из следующего параграфа, этим свойством обладает ньютонов потенциал любой конечной области (D), если только плотность μ ограничена и интегрируема.

Сейчас найдем приближенные формулы для значения ньютонова потенциала любой конечной области (D) и ограниченной плотности μ для точки, весьма удаленной от тела (D).

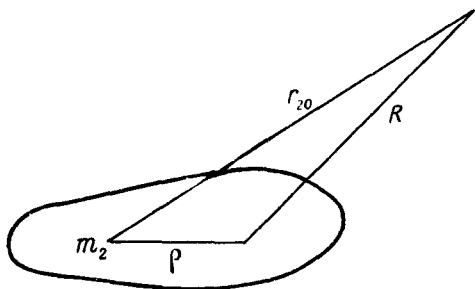


Рис. 21.

В качестве полюса сферической системы координат (рис. 21) выберем центр тяжести тела (D). Если полярная ось $\theta = 0$ проходит через точку m_0 , то имеем:

$$r_{20} = \sqrt{\rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos \theta},$$

где R есть радиус-вектор точки m_0 . Разлагая $\frac{1}{r_{20}}$ в ряд по степеням $\frac{1}{R}$, получим:

$$\frac{1}{r_{20}} = \frac{1}{R \sqrt{1 - \frac{2\rho}{R} \cos \theta + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2}} = \frac{1}{R} + \frac{\rho \cos \theta}{R^2} + \dots$$

Продолжая до членов порядка $\left(\frac{1}{R}\right)^3$, имеем:

$$\int_{(D)} \frac{\mu d\tau}{r_{20}} = \frac{1}{R} \int_{(D)} \mu d\tau + \frac{1}{R^2} \int_{(D)} \mu \rho \cos \theta d\tau + \dots$$

Между тем

$$\int_{(D)} \mu \rho \cos \theta \, d\tau = \int_{(D)} \mu \zeta \, d\tau = 0,$$

так как полюс есть центр тяжести тела (D) . Таким образом, получаем, продолжая до члена порядка $\left(\frac{1}{R}\right)^3$:

$$\int_{(D)} \frac{\mu \, d\tau}{r_{20}^2} = \frac{M}{R} + \dots,$$

где M есть масса тела.

§ 13. О первых производных ньютонова потенциала

Теорема. Если плотность μ ньютонова потенциала ограничена и интегрируема, то потенциал имеет первые производные по координатам x, y, z точки m_0 и эти производные правильно непрерывны во всем пространстве.

Пусть $x+h, y, z$ будут координатами точки m_1 , а r_{21} — расстояние точки m_1 до точки $m_2(\xi, \eta, \zeta)$ интегрирования.

Изучим разность

$$I = \frac{1}{h} \left[\int_{(D)} \frac{\mu \, d\tau}{r_{21}} - \int_{(D)} \frac{\mu \, d\tau}{r_{20}} \right] - \int_{(D)} \mu \frac{\xi - x}{r_{20}^3} \, d\tau \quad (49)$$

и покажем, что она бесконечно мала вместе с h . Если это будет установлено, то будем иметь:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_{(D)} \frac{\mu \, d\tau}{r_{21}} - \int_{(D)} \frac{\mu \, d\tau}{r_{20}} \right] = \int_{(D)} \mu \frac{\xi - x}{r_{20}^3}, \quad (50)$$

что доказывает существование производной по x и дает значение этой производной.

Образуя вокруг точки m_0 область (δ) § 11, имеем:

$$\int_{(\delta)} \left| \mu \frac{\xi - x}{r_{20}^3} \right| d\tau < A \int_{(\delta)} \frac{d\tau}{r_{20}^2} < 4\pi A \delta_2,$$

где A — верхняя грань для $|\mu|$. Это доказывает сходимость интеграла правой части (50).

Рассмотрим теперь шар с центром в m_0 и радиуса $2|h|$. Разность I принимает вид:

$$I = \frac{1}{h} \left[\int_{(2h)} \mu \frac{d\tau}{r_{21}} - \int_{(2h)} \mu \frac{d\tau}{r_{20}} \right] - \int_{(2h)} \mu \frac{\xi - x}{r_{20}^3} d\tau + \\ + \int_{(D-2h)} \mu \left\{ \frac{1}{h} \left(\frac{1}{r_{21}} - \frac{1}{r_{20}} \right) - \frac{\xi - x}{r_{20}^3} \right\} d\tau. \quad (51)$$

Третий интеграл в (51) меньше $4\pi A \cdot 2|h|$. На основании результатов § 11

$$\left| \frac{1}{h} \int_{(2h)} \mu \frac{d\tau}{r_{20}} \right| < \frac{1}{|h|} A \int_{(2h)} \frac{d\tau}{r_{20}} = \frac{2\pi A}{|h|} (2|h|)^2 = 8\pi A |h|.$$

Для оценок первого интеграла в (51), опишем вокруг m_1 как центра шар радиуса $3|h|$. Этот шар $(3h)$ содержит внутри первый шар $(2h)$. Отсюда следует

$$\left| \frac{1}{h} \int_{(2h)} \mu \frac{d\tau}{r_{21}} \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_{(2h)} |\mu| \frac{d\tau}{r_{21}} \leq \frac{1}{|h|} \int_{(3h)} |\mu| \frac{d\tau}{r_{21}} < \frac{A}{|h|} \times \\ \times 2\pi (3|h|)^2 = 18\pi A |h|.$$

Рассмотрим последний член в (51). Применяя формулу Тейлора, имеем:

$$\frac{1}{h} \left(\frac{1}{r_{21}} - \frac{1}{r_{20}} \right) - \frac{\xi - x}{r_{20}^3} = h \left\{ \frac{3(\xi - x - \theta h)^2}{r'^5} - \frac{1}{r'^3} \right\},$$

где r' есть расстояние от точки m' с координатами $(x + \theta h, y, z)$ ($0 < \theta < 1$), расположенной между m_0 и m_1 , до точки $m_2(\xi, \eta, \zeta)$. Отсюда следует

$$\left| \frac{1}{h} \left(\frac{1}{r_{21}} - \frac{1}{r_{20}} \right) - \frac{\xi - x}{r_{20}^3} \right| < |h| \cdot \frac{4}{r'^3}.$$

Между тем расстояние между m' и m_0 меньше $|h|$, и точка m_2 вне шара $(2h)$. Поэтому на основании неравенства (9)

$$r' > \frac{1}{2} r_{20},$$

откуда следует

$$\left| \frac{1}{h} \left(\frac{1}{r_{21}} - \frac{1}{r_{20}} \right) - \frac{\xi - x}{r_{20}^3} \right| < |h| \cdot \frac{32}{r_{20}^3}.$$

Если R есть радиус шара с центром в m_0 и содержащего внутри тело (D) , то имеем:

$$\begin{aligned} \left| \int_{(D-2h)} \mu \left\{ \frac{1}{h} \left(\frac{1}{r_{21}} - \frac{1}{r_{20}} \right) - \frac{\xi - x}{r_{20}^3} \right\} d\tau \right| < \\ < A \cdot 32 |h| \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{2|h|}^R \frac{\rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi}{\rho^3} = \\ = 128\pi A |h| \log \frac{R}{2|h|} = aA |h|^{\lambda'}. \end{aligned}$$

Итак, разность I бесконечно мала вместе с $|h|$, так как каждый из трех первых интегралов в (51) бесконечно мал как $c|h|$, а последний как $c|h|^{\lambda'}$. Этим доказано существование производной. Формула (50) дает значение этой производной. Таким же образом доказывается, что существуют производные по y и z .

Остается доказать правильную непрерывность производных. Докажем непрерывность $\frac{\partial P}{\partial x}$. Обозначим расстояние между точками m_0 и $m_1(x_1, y_1, z_1)$ через δ , и рассмотрим разность

$$I = \int_{(D)} \mu \frac{\xi - x_1}{r_{21}^3} d\tau - \int_{(D)} \mu \frac{\xi - x}{r_{20}^3} d\tau. \quad (52)$$

Опишем около точки m_0 шар радиуса 2δ и разности (52) дадим вид:

$$I = \int_{(2\delta)} \mu \frac{\xi - x_1}{r_{21}^3} d\tau - \int_{(2\delta)} \mu \frac{\xi - x}{r_{20}^3} d\tau + \int_{(D-2\delta)} \mu \left\{ \frac{\xi - x_1}{r_{21}^3} - \frac{\xi - x}{r_{20}^3} \right\} d\tau. \quad (53)$$

Аналогично тому, как изучалась разность (51), и используя сферу радиуса 3δ с центром в m_1 , заключаем, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{(2\delta)} \mu \frac{\xi - x}{r_{20}^3} d\tau \right| &< A \cdot 4\pi \cdot (2\delta), \\ \left| \int_{(2\delta)} \mu \frac{\xi - x_1}{r_{21}^3} d\tau \right| &< \int_{(3\delta)} |\mu| \left| \frac{\xi - x_1}{r_{21}^3} \right| d\tau < A \cdot 4\pi \cdot (3\delta). \end{aligned}$$

Изучим последний интеграл (53). Для этого заметим, что $|\xi - x_1| < r_{21}$, $|x - x_1| < \delta$ и, кроме того, в $(D - 2\delta)$ $r_{21} > \frac{r_{20}}{2}$. Отсюда

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\xi - x_1}{r_{21}^3} - \frac{\xi - x}{r_{20}^3} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{r_{20}^3} [(\xi - x_1) - (\xi - x)] + (\xi - x_1) \left(\frac{1}{r_{21}^3} - \frac{1}{r_{20}^3} \right) \right| = \\ &= \left| \frac{x - x_1}{r_{20}^3} + (\xi - x_1) \cdot \frac{r_{20} - r_{21}}{r_{20} r_{21}} \left(\frac{1}{r_{20}^2} + \frac{1}{r_{20} r_{21}} + \frac{1}{r_{21}^2} \right) \right| < \\ &< \frac{\delta}{r_{20}^3} + \frac{\delta}{r_{20}} \left(\frac{1}{r_{20}^2} + \frac{2}{r_{20}^2} + \frac{4}{r_{20}^2} \right) = \frac{8\delta}{r_{20}^3}, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int_{(D-2\delta)} \mu \left\{ \frac{\xi - x_1}{r_{21}^3} - \frac{\xi - x}{r_{20}^3} \right\} d\tau \right| &< 8A\delta \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{2\delta}^R \frac{\rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi}{\rho^3} = \\ &= 32\pi A\delta \ln \frac{R}{2\delta} = bA\delta^\lambda. \end{aligned}$$

Итак, разность (52) меньше числа вида

$$aA\delta + bA\delta^\lambda = cA\delta^\lambda, \quad (\lambda < 1),$$

что и требовалось доказать.

Д о б а в л е н и е. Нетрудно доказать следующую теорему: пусть плотность μ интегрируема (но может быть неограничена) в некоторой конечной области (D) . Если в некоторой области (ω) , лежащей в (D) , плотность μ ограничена, то в любой области (ω_1) , содержащейся вместе с границей в (ω) , потенциал P ограничен и имеет ограниченные и непрерывные первые производные.

Действительно, имеем:

$$P = \int_{(D)} \frac{\mu d\tau}{r_{20}} = \int_{(D-\omega)} \frac{\mu}{r_{20}} d\tau + \int_{(\omega)} \frac{\mu}{r_{20}} d\tau.$$

Второй интеграл правой части имеет ограниченные непрерывные производные во всем пространстве, как ньютонов потенциал с ограниченной плотностью.

Первый интеграл правой части в области (ω_1) ограничен и имеет непрерывные производные всех порядков, так как для точек m_0 из (ω_1) r_{20} имеет положительную нижнюю границу, когда m_2 в $(D - \omega)$.

§ 14. О существовании вторых производных ньютонова потенциала

Для существования вторых производных ньютонова потенциала недостаточна лишь простая непрерывность плотности. Приведем пример.

Пусть (D) есть шар радиуса $R < 1$ с центром в начале координат. Положим

$$\mu = \left(\frac{3\zeta^2}{\rho^2} - 1 \right) f(\rho), \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

где $f(\rho)$ непрерывная функция в промежутке $0 \leq \rho \leq R$, причем $f(0) = 0$. Очевидно, μ непрерывна в шаре и равна нулю в центре шара. Первые производные ньютонова потенциала с такой плотностью на основании предыдущего параграфа непрерывны во всем пространстве.

Покажем, что при некотором выборе функции $f(\rho)$ в центре шара не существует второй производной по z ньютонова потенциала.

Действительно, вычислим значение $\psi(a)$ потенциала в точке $(a, 0, 0)$, где $0 < a < R$. Вводя сферические координаты, получим:

$$\psi(a) = 2\pi \int_0^R \rho^2 f(\rho) \left\{ \int_0^\pi \frac{\sin \theta [3 \cos^2 \theta - 1]}{\sqrt{a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \theta}} d\theta \right\} d\rho.$$

Полагая $\sqrt{a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \theta} = t$, получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \frac{\sin \theta [3 \cos^2 \theta - 1]}{\sqrt{a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \theta}} d\theta = \\ &= \frac{1}{a\rho} \int_{|a-\rho|}^{a+\rho} \left[3 \left(\frac{a^2 + \rho^2 - t^2}{2a\rho} \right)^2 - 1 \right] dt = \begin{cases} \frac{4}{5} \frac{\rho^2}{a^3}, & \text{если } \rho < a, \\ \frac{4}{5} \frac{a^2}{\rho^3}, & \text{если } \rho > a, \end{cases} \end{aligned}$$

и поэтому имеем:

$$\psi(a) = \frac{8\pi}{5} \left[\frac{1}{a^3} \int_0^a \rho^4 f(\rho) d\rho + a^2 \int_a^R \frac{f(\rho)}{\rho} d\rho \right].$$

Дифференцируя, находим после упрощения:

$$\psi'(a) = \frac{8\pi}{5} \left[-\frac{3}{a^4} \int_0^a \rho^4 f(\rho) d\rho + 2a \int_a^R \frac{f(\rho)}{\rho} d\rho \right],$$

и в силу отмеченной выше непрерывности первых производных получаем:

$$\psi'(0) = \lim_{a \rightarrow 0} \psi'(a) = 0$$

при любом выборе непрерывной функции $f(\rho)$.

Рассмотрим отношение

$$\frac{\psi'(a) - \psi'(0)}{a} = \frac{8\pi}{5} \left[-\frac{3}{a^5} \int_0^a \rho^4 f(\rho) d\rho + 2 \int_a^R \frac{f(\rho)}{\rho} d\rho \right].$$

Первое слагаемое квадратной скобки при $a \rightarrow 0$ имеет пределом $-\frac{3}{5} f(0) = 0$. Второе слагаемое предела не имеет, если $f(\rho)$ выбрано так, чтобы был расходящимся интеграл

$$\int_0^R \frac{f(\rho)}{\rho} d\rho.$$

Достаточно положить $f(\rho) = \frac{1}{\log \rho}$, $f(0) = 0$. При таком выборе $f(\rho)$ не существует $\psi''(0)$, и $\psi''(a)$ не ограничена. Если положить

$$f(\rho) = \frac{\cos \sqrt{\log \frac{1}{\rho}}}{\sqrt{\log \frac{1}{\rho}}}, \quad f(0) = 0,$$

то $\psi''(0)$ не существует, но $\psi''(a)$ остается ограниченной.

Теорема. Если плотность μ правильно непрерывна, т. е. если имеем

$$|\mu - \mu_0| < Ar_{20}^\lambda,$$

то ньютонов потенциал имеет вторые производные во всех точках, не лежащих на границе области (D) .

Существование вторых производных в точках, лежащих вне области (D) , очевидно. Остается доказать существование

их в точках, лежащих внутри (D) . Займемся производной $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$. Пусть m_0 точка внутри (D) . Опишем вокруг нее шар (d) радиуса d , выбранного так, чтобы шар лежал целиком внутри (D) . Потенциал (46) запишем в виде:

$$P = \int_{(d)} \mu \frac{d\tau}{r_{20}} + \int_{(D-d)} \mu \frac{d\tau}{r_{20}}. \quad (54)$$

Существование вторых производных в точке m_0 у второго слагаемого очевидно, так как это слагаемое есть гармоническая функция в шаре (d) .

Рассматриваемая производная этого слагаемого равна

$$\int_{(D-d)} \mu \left\{ \frac{3(\xi - x)^2}{r_{20}^5} - \frac{1}{r_{20}^3} \right\} d\tau. \quad (55)$$

Остается изучить первое слагаемое (54), которое обозначим P_1 . Пусть h ($|h| < \frac{d}{4}$) произвольное число. Обозначим точку с координатами $(x+h, y, z)$ через m_1 , а ее расстояние до m_2 через r_{21} .

Образую разность

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left\{ \int_{(d)} \mu \frac{\xi - x_1}{r_{21}^3} d\tau - \int_{(d)} \mu \frac{\xi - x}{r_{20}^3} d\tau \right\} = \\ = \frac{\mu_0}{h} \left(\int_{(d)} \frac{\xi - x_1}{r_{21}^3} d\tau - \int_{(d)} \frac{\xi - x}{r_{20}^3} d\tau \right) + \\ + \frac{1}{h} \left(\int_{(d)} (\mu - \mu_0) \frac{\xi - x_1}{r_{21}^3} d\tau - \int_{(d)} (\mu - \mu_0) \frac{\xi - x}{r_{20}^3} d\tau \right), \quad (56) \end{aligned}$$

где μ_0 есть значение μ в точке m_0 . Предел этой разности при $h \rightarrow 0$ есть в точности вторая производная от P_1 , взятая два раза по x .

Займемся первым членом правой части (56). Он является произведением $\frac{\mu_0}{h}$ на разность значений в точках m_1 и m_0 первой производной по x' от ньютонова потенциала с плотностью единица по шару (d) , причем потенциал рассматривается как функция точки $m'(x', y', z')$. Заменяя во второй

сгоке равенства (48) a^2 на $(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$, дифференцируя по x' , полагая $x' = x + h$ и $x' = x$ и вычитая, найдем:

$$\frac{\mu_0}{h} \left(\int_{(d)} \frac{\xi - x_1}{r_{21}^3} d\tau - \int_{(d)} \frac{\xi - x}{r_{20}^3} d\tau \right) = -\frac{4\pi}{3} \mu_0. \quad (57)$$

Займемся вторым слагаемым в (56). Мы изучим разность

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left(\int_{(d)} (\mu - \mu_0) \frac{\xi - x_1}{r_{21}^3} d\tau - \int_{(d)} (\mu - \mu_0) \frac{\xi - x}{r_{20}^3} d\tau \right) - \\ & - \int_{(d)} (\mu - \mu_0) \left\{ \frac{3(\xi - x)^2}{r_{20}^5} - \frac{1}{r_{20}^3} \right\} d\tau = \\ & = \frac{1}{h} \int_{(2h)} (\mu - \mu_0) \frac{\xi - x_1}{r_{21}^3} d\tau - \frac{1}{h} \int_{(2h)} (\mu - \mu_0) \frac{\xi - x}{r_{20}^3} d\tau - \\ & - \int_{(2h)} (\mu - \mu_0) \left\{ \frac{3(\xi - x)^2}{r_{20}^5} - \frac{1}{r_{20}^3} \right\} d\tau + \\ & + \int_{(d-2h)} (\mu - \mu_0) \left[\frac{1}{h} \left(\frac{\xi - x_1}{r_{21}^3} - \frac{\xi - x}{r_{20}^3} \right) - \left(\frac{3(\xi - x)^2}{r_{20}^5} - \frac{1}{r_{20}^3} \right) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (58)$$

где $(2h)$ означает шар с центром в m_0 и радиуса $2|h|$, содержащийся в (d) в силу выбора h .

Докажем, что разность (58) бесконечно мала вместе с h ; это нам даст предел второго члена в (56).

Для третьего интеграла правой части (58) имеем:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{(2h)} (\mu - \mu_0) \left\{ \frac{3(\xi - x)^2}{r_{20}^5} - \frac{1}{r_{20}^3} \right\} d\tau \right| < \\ & < 4A \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2|h|} \frac{r_{20}^\lambda}{r_{20}^3} \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi = \\ & = 16\pi A \int_0^{2|h|} \frac{d\rho}{\rho^{1-\lambda}} = \frac{16\pi}{\lambda} A (2|h|)^\lambda. \end{aligned}$$

Так как шар с центром в m_1 и радиуса $3|h|$ содержится в (d) и содержит внутри себя шар $(2h)$, и так как

$$|\mu - \mu_0| = |(\mu - \mu_1) + (\mu_1 - \mu_0)| \leq |\mu - \mu_1| + |\mu_1 - \mu_0| < Ar_{21}^\lambda + A|h|^\lambda,$$

то для первого интеграла получаем:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_{(2h)} (\mu - \mu_0) \frac{\xi - x_1}{r_{21}^3} d\tau \right| &\leq \frac{A}{|h|} \int_{(2h)} \frac{r_{21}^\lambda}{r_{21}^2} d\tau + \\ &+ \frac{A|h|^\lambda}{|h|} \int_{(2h)} \frac{d\tau}{r_{21}^2} < \frac{A}{|h|} \int_{(3h)} \frac{r_{21}^\lambda}{r_{21}^2} d\tau + \frac{A|h|^\lambda}{|h|} \int_{(3h)} \frac{d\tau}{r_{21}^2} = \\ &= \frac{4\pi A}{1+\lambda} (3|h|)^\lambda + 12\pi A|h|^\lambda. \end{aligned}$$

Второй интеграл в (58) меньше, чем

$$\frac{1}{|h|} \int_{(2h)} \frac{|\mu - \mu_0|}{r_{20}^2} d\tau < \frac{4\pi A \cdot 2^{1+\lambda}}{1+\lambda} |h|^\lambda.$$

Отсюда следует, что сумма первых трех интегралов правой части (58) меньше числа $aA|h|^\lambda$. Функция в квадратных скобках последнего интеграла остается ограниченной в области интегрирования. Применяя формулу Тейлора, находим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left(\frac{\xi - x_1}{r_{21}^3} - \frac{\xi - x}{r_{20}^3} \right) - \left(\frac{3(\xi - x)^2}{r_{20}^5} - \frac{1}{r_{20}^3} \right) = \\ = h \left\{ \frac{15(\xi - x')^3}{r'^7} - \frac{9(\xi - x')}{r'^5} \right\}, \end{aligned}$$

где x', y', z' — координаты некоторой точки m' , расположенной между m_0 и m_1 , а r' — расстояние этой точки до точки m_2 . Между тем расстояние $m'm_0$ меньше $|h|$, а точка m_2 вне шара $(2h)$. Отсюда на основании неравенства (9) следует, что r' больше $\frac{1}{2}r_{20}$ и что

$$\left| \frac{1}{h} \left(\frac{\xi - x_1}{r_{21}^3} - \frac{\xi - x}{r_{20}^3} \right) - \left(\frac{3(\xi - x)^2}{r_{20}^5} - \frac{1}{r_{20}^3} \right) \right| < |h| \frac{24 \cdot 2^4}{r_{20}^4}.$$

Следовательно, последний интеграл в (58) по модулю меньше

$$24 \cdot 2^4 \cdot |h| \cdot A \int_{(d-2h)} \frac{r_{20}^\lambda}{r_{20}^4} d\tau = A \cdot 24 \cdot 2^4 \cdot 2\pi \int_{2|h|}^d \frac{\rho^2 d\rho}{\rho^{4-\lambda}} = \\ = \frac{24 \cdot 2^4 \cdot 4\pi}{1-\lambda} A \cdot |h| \left\{ \frac{1}{(2|h|)^{1-\lambda}} - \frac{1}{d^{1-\lambda}} \right\} < cA |h|^\lambda.$$

С установлением этого последнего неравенства видно, что разность (58) действительно бесконечно мала вместе с h . Из всего предшествующего заключаем:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\frac{4\pi}{3} \mu_0 + \int_{(d)} (\mu - \mu_0) \left\{ \frac{3(\xi - x)^2}{r_{20}^5} - \frac{1}{r_{20}^3} \right\} d\tau + \\ + \int_{(D-d)} \mu \left\{ \frac{3(\xi - x)^2}{r_{20}^5} - \frac{1}{r_{20}^3} \right\} d\tau.$$

Для вычисления $\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}$ заметим, что член, соответствующий первому члену правой части (56), равен нулю. Тогда имеем:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = 0 + \int_{(d)} (\mu - \mu_0) \frac{3(\xi - x)(\eta - y)}{r_{20}^5} d\tau + \\ + \int_{(D-d)} \mu \frac{3(\xi - x)(\eta - y)}{r_{20}^5} d\tau.$$

З а м е ч а н и е. Вместо шара (d) , содержащего точку m_0 , можно взять любую область (D_0) , содержащую точку m_0 и содержащуюся целиком внутри (D) .

Формулы, дающие $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}$, принимают вид:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \mu_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{(D_0)} \frac{d\tau}{r} \right)_{m_0} + \int_{(D_0)} (\mu - \mu_0) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{20}}}{\partial x^2} d\tau + \\ + \int_{(D-D_0)} \mu \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{20}}}{\partial x^2} d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = \mu_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{(D_0)} \frac{\partial \tau}{r_{20}} \right)_m + \int_{(D_1)} (\mu - \mu_0) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{20}}}{\partial x \partial y} d\tau + \\ + \int_{(D-D_0)} \mu \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{20}}}{\partial x \partial y} d\tau.$$

§ 15. Теорема Пуассона

Теорема. Если плотность μ ньютонова потенциала в конечной области (D) правильно непрерывна, то в каждой внутренней точке m_0 области (D) имеет место равенство

$$(\Delta P)_{m_0} = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right)_{m_0} = -4\pi\mu_0.$$

Действительно, складывая полученные равенства

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\frac{4\pi}{3}\mu_0 + \int_{(d)} (\mu - \mu_0) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{20}}}{\partial x^2} d\tau + \int_{(D-d)} \mu \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{20}}}{\partial x^2} d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{4\pi}{3}\mu_0 + \int_{(d)} (\mu - \mu_0) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{20}}}{\partial y^2} d\tau + \int_{(D-d)} \mu \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{20}}}{\partial y^2} d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{3}\mu_0 + \int_{(d)} (\mu - \mu_0) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{20}}}{\partial z^2} d\tau + \int_{(D-d)} \mu \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{20}}}{\partial z^2} d\tau,$$

приходим к требуемому равенству.

Пусть $f(x, y, z)$ непрерывна в некоторой области (D) и пусть $m_0(x_0, y_0, z_0)$ некоторая внутренняя точка этой области.

Пусть (m_0, h) означает шар с центром в m_0 и радиуса h . Пусть h настолько мал, что (m_0, h) содержится в (D) . Рассмотрим отношение к $\frac{h^2}{10}$ разности между средним значением функции $f(x, y, z)$ по шару (m_0, h) и значением $f(x, y, z)$ в точке m_0 :

$$\Delta_h f = \left[\frac{1}{\frac{4}{3}\pi h^3} \int_{(m_0, h)} f(m) d\tau - f(m_0) \right] : \frac{h^2}{10} = \frac{30}{4\pi h^5} \int_{(m_0, h)} [f(m) - f(m_0)] d\tau.$$

Если f гармоническая функция в (D) , то $\Delta_h f = 0$, что следует из теоремы о среднем для гармонических функций.

Может случиться, что для некоторой непрерывной функции $f(m)$ $\Delta_h f$ имеет определенный конечный предел при $h \rightarrow 0$. Тогда этот предел называют обобщенным лапласианом функции f . Мы его обозначим через $\Delta^* f(m_0)$.

Нетрудно убедиться в том, что если f имеет непрерывные производные второго порядка, то $\Delta^* f(m_0) = \Delta f(m_0)$, т. е. обобщенный лапласиан совпадает с обычным. Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} f(m) - f(m_0) &= f'_x(m_0)(x-x_0) + f'_y(m_0)(y-y_0) + f'_z(m_0)(z-z_0) + \\ &+ \frac{1}{2} [f''_{xx}(m_0)(x-x_0)^2 + f''_{yy}(m_0)(y-y_0)^2 + f''_{zz}(m_0)(z-z_0)^2 + \\ &+ 2f''_{xy}(m_0)(x-x_0)(y-y_0) + \dots] + \\ &+ \frac{1}{2} \{ [f''_{xx}(m') - f''_{xx}(m_0)](x-x_0)^2 + \dots \}, \end{aligned}$$

где m' — некоторая точка между m_0 и m . Так как по предположению вторые производные функции f непрерывны, то разности $f''_{xx}(m) - f''_{xx}(m_0)$ и им подобные стремятся к нулю при $h \rightarrow 0$. Отсюда следует, что фигурная скобка не превосходит по модулю $\varepsilon(h)h^2$, где $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, и поэтому

$$\left| \frac{30}{4\pi h^5} \int_{(m_0, h)} \{ \quad \} d\tau \right| < 10\varepsilon(h) \rightarrow 0.$$

Кроме того, легко видеть, что интегралы по (m_0, h) от

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad z - z_0, \quad (x - x_0)(y - y_0), \quad (x - x_0)(z - z_0), \\ (y - y_0)(z - z_0)$$

равны нулю, а интегралы от $(x - x_0)^2$, $(y - y_0)^2$, $(z - z_0)^2$ равны между собой и равны

$$\frac{1}{3} \int_{(m_0, h)} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] d\tau = \frac{4\pi}{3} \int_0^h r^4 dr = \frac{4\pi h^5}{15}.$$

Из всего этого следует, что

$$\begin{aligned} \Delta_h f &= \frac{30}{4\pi h^5} \int_{(m_0, h)} [f(m) - f(m_0)] d\tau = \\ &= \frac{30}{4\pi h^5} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi h^5}{15} \cdot (f''_{xx}(m_0) + f''_{yy}(m_0) + f''_{zz}(m_0)) \right] + \\ &+ \frac{30}{4\pi h^5} \int_{(m_0, h)} \{ \quad \} d\tau \rightarrow f''_{xx}(m_0) + f''_{yy}(m_0) + f''_{zz}(m_0) = \Delta f, \end{aligned}$$

т. е. $\Delta^* f = \Delta f$, что и требовалось доказать.

Теорема. Если плотность μ ньютонова потенциала ограничена, интегрируема и непрерывна во внутренней точке m_0 области (D) , то

$$\Delta^* P(m_0) = -4\pi\mu_0,$$

т. е. ньютонов потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона с обобщенным лапласианом в каждой точке непрерывности плотности.

Действительно, обозначая через μ_0 значение μ в точке m_0 , имеем:

$$P(m_1) = \int_{(\dot{D})} \frac{\mu(2)}{r_{12}} d\tau_2 = \mu_0 \int \frac{d\tau_2}{r_{12}} + \int_{(\dot{D})} (\mu - \mu_0) \frac{d\tau_2}{r_{12}}.$$

Интеграл

$$\int_{(\dot{D})} \frac{d\tau_2}{r_{12}},$$

являясь ньютоновым потенциалом с плотностью 1, имеет непрерывные вторые производные и лапласиан его равен -4π , а следовательно, и обобщенный лапласиан равен -4π . Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить, что в точке m_0 обобщенный лапласиан от второго интеграла равен нулю. Для этого надо доказать, что

$$\frac{1}{h^5} \int_{(m_0, h)} \left[\int_{\dot{D}} (\mu - \mu_0) \left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{02}} \right) d\tau_2 \right] d\tau_1 \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Во-первых заметим, что здесь допустима перестановка порядка интегрирований, так как после замены подынтегральной функции модулем внутренних интеграл остается ограниченным. Кроме того, заметим, что

$$\int_{(m_0, h)} \frac{1}{r_{12}} d\tau_1 = \begin{cases} \frac{4\pi}{h^3} \cdot \frac{1}{r_{02}}, & \text{если } m_2 \text{ вне } (m_0, h), \\ 2\pi h^2 - \frac{2\pi}{3} r_{02}^2, & \text{если } m_2 \text{ внутри } (m_0, h). \end{cases}$$

В результате получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^5} \int_{(m_0, h)} \left[\int_{(\dot{D})} (\mu - \mu_0) \left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{02}} \right) d\tau_2 \right] d\tau_1 = \\ &= \frac{1}{h^5} \int_{(\dot{D})} (\mu - \mu_0) \left[\int_{(m_0, h)} \left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{02}} \right) d\tau_1 \right] d\tau_2 = \\ &= \frac{1}{h^5} \int_{(D - (m_0, h))} (\mu - \mu_0) \left[\frac{4\pi h^3}{3} \cdot \frac{1}{r_{02}} - \frac{4\pi h^3}{3} \cdot \frac{1}{r_{02}} \right] d\tau_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{h^5} \int_{(m_0, h)} (\mu - \mu_0) \left[2\pi h^2 - \frac{2\pi}{3} r_{02}^2 - \frac{4\pi h^3}{3} \cdot \frac{1}{r_{02}} \right] d\tau_2 = \\
 & = \frac{1}{h^5} \int_{(m_0, h)} (\mu - \mu_0) \left[2\pi h^2 - \frac{2\pi}{3} r_{02}^2 - \frac{4\pi h^3}{3} \cdot \frac{1}{r_{02}} \right] d\tau_2.
 \end{aligned}$$

Так как μ непрерывна в точке m_0 , то каково бы ни было $\varepsilon > 0$ для достаточно малого $h > 0$, $|\mu - \mu_0| < \varepsilon$ в (m_0, h) , и поэтому последний интеграл не превосходит

$$\frac{\varepsilon}{h^5} \left[2\pi h^3 + \frac{4}{3} \pi h^3 + \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{4\pi h^5}{5} + \frac{4\pi h^3}{3} \cdot 2\pi h^2 \right] = \frac{88}{15} \pi^2 \varepsilon.$$

Это означает, что последний интеграл стремится к нулю вместе с h и теорема доказана.

Обобщенный лапласиан был введен И. И. Приваловым и доказанная сейчас теорема принадлежит ему (И. И. Привалов, „Субгармонические функции“, гл. I, § 2).

В последующем будет дано определение обобщенных производных в смысле акад. С. Л. Соболева и будет указано, что ньютонов потенциал, плотность которого суммируема с квадратом, также удовлетворяет уравнению Пуассона в некотором смысле.

§ 16. О непрерывности вторых производных ньютонова потенциала

До сих пор, изучая ньютонов потенциал, мы могли считать границу конечной области (D) какой угодно. В следующей теореме предполагается, что область (D) , где определена плотность μ , ограничена конечным числом замкнутых поверхностей Лицунова.

Теорема. Если плотность μ ньютонова потенциала правильно непрерывна, вторые производные потенциала правильно непрерывны внутри (D_i) и внутри (D_e) .

Доказательство теоремы сложно и помещено в дополнении III.

Считая теорему справедливой, можно заключить, что вторые производные имеют определенные пределы, когда точка m_0 стремится к точке границы. Эти пределы различны для точек m_0 , стремящихся к границе изнутри (D_i) и изнутри (D_e) . Теорема Гюгонио — Адамара позволяет легко определить скачки этих производных при прохождении точки через границу.

Производные

$$\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}$$

могут быть рассматриваемы как значения двух функций, одна из которых определена внутри (D_i), другая вне (D_e) и имеющих равные значения на границе.

Обозначая через λ , ν , θ некоторые функции, определенные на границе, можем записать:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2} &= \lambda \cos(Nx), & \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 P_e}{\partial x \partial y} &= \nu \cos(Nx), \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 P_e}{\partial x \partial y} &= \lambda \cos(Ny), & \frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P_e}{\partial y^2} &= \nu \cos(Ny), \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 P_e}{\partial x \partial z} &= \lambda \cos(Nz), & \frac{\partial^2 P_i}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 P_e}{\partial y \partial z} &= \nu \cos(Nz), \\ & & \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 P_e}{\partial x \partial z} &= \theta \cos(Nx), \\ & & \frac{\partial^2 P_i}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 P_e}{\partial y \partial z} &= \theta \cos(Ny), \\ & & \frac{\partial^2 P_i}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 P_e}{\partial z^2} &= \theta \cos(Nz). \end{aligned} \quad (59)$$

Сравнение правых частей равенств, левые части которых равны, дает:

$$\lambda \cos(Ny) = \nu \cos(Nx),$$

$$\lambda \cos(Nz) = \theta \cos(Nx),$$

$$\nu \cos(Nz) = \theta \cos(Ny),$$

т. е.

$$\frac{\lambda}{\cos(Nx)} = \frac{\nu}{\cos(Ny)} = \frac{\theta}{\cos(Nz)} = \vartheta,$$

откуда следует:

$$\lambda = \vartheta \cos(Nx), \quad \nu = \vartheta \cos(Ny), \quad \theta = \vartheta \cos(Nz).$$

Складывая почленно первое, пятое и последнее из равенств (59), найдем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_e}{\partial z^2} \right) &= \\ &= \vartheta [\cos^2(Nx) + \cos^2(Ny) + \cos^2(Nz)] = \vartheta. \end{aligned}$$

Применяя теорему Пуассона и вспоминая, что вне (D_e) потенциал есть гармоническая функция, заключаем:

$$\vartheta = -4\pi\mu.$$

Из предыдущего заключаем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2} &= -4\pi\mu \cos^2(Nx), \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 P_e}{\partial x \partial y} &= -4\pi\mu \cos(Nx) \cos(Ny), \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 P_e}{\partial x \partial z} &= -4\pi\mu \cos(Nx) \cos(Nz), \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P_e}{\partial y^2} &= -4\pi\mu \cos^2(Ny), \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 P_e}{\partial y \partial z} &= -4\pi\mu \cos(Ny) \cos(Nz), \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 P_e}{\partial z^2} &= -4\pi\mu \cos^2(Nz).\end{aligned}$$

§ 17. Производные ньютонова потенциала с дифференцируемой плотностью

Предположим, что плотность μ имеет ограниченные и непрерывные первые производные. Опишем шар (δ) с центром в m_0 и радиусом δ .

Можно записать:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \int_{(D-\delta)} \mu \frac{\xi - x}{r_{20}^3} d\tau + \int_{(\delta)} \mu \frac{\xi - x}{r_{20}^3} d\tau.$$

Второй интеграл по модулю меньше $4\pi A\delta$. Преобразуя первый интеграл, получим:

$$\begin{aligned}\int_{(D-\delta)} \mu \frac{\xi - x}{r_{20}^3} d\tau &= \int_{(D-\delta)} \mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{20}} d\tau = - \int_{(D-\delta)} \mu \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r_{20}} d\tau = \\ &= - \int_{(D-\delta)} \frac{\partial \left(\mu \frac{1}{r_{20}} \right)}{\partial \xi} d\tau + \int_{(D-\delta)} \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{d\tau}{r_{20}}.\end{aligned}\quad (60)$$

Займемся в первую очередь вторым интегралом. Он может быть представлен в виде:

$$\int_{(D)} \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{d\tau}{r_{20}} - \int_{(\delta)} \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{d\tau}{r_{20}},$$

где второй член по модулю меньше $2\pi A\delta^2$ и где A есть верхняя грань $|\mu|$ и $\left|\frac{\partial\mu}{\partial\xi}\right|$.

Для первого интеграла в (60) имеем:

$$-\int_{D-(\delta)} \frac{\partial\left(\mu \frac{1}{r_{20}}\right)}{\partial\xi} d\tau = -\int_{(\delta)} \mu \cos(Nx) \frac{d\sigma}{r_{20}} + \int_{(\sigma)} \mu \cos(Nx) \frac{d\sigma}{r_{20}},$$

где (σ) означает границу шара (δ) ; нормаль к (σ) направлена вне шара (δ) .

Последний интеграл, очевидно, меньше, чем

$$A \int_{(\sigma)} \frac{d\sigma}{r_{20}} = \frac{A}{\delta} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \delta^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi A\delta.$$

Если δ стремится к нулю, получаем:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = - \int_{(\delta)} \mu \cos(Nx) \frac{d\sigma}{r_{20}} + \int_{(D)} \frac{\partial\mu}{\partial\xi} \frac{d\tau}{r_{20}}. \quad (61)$$

Предположим, что μ имеет ограниченные и непрерывные вторые производные; дифференцируя формулу (61) и применяя ее снова, найдем:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = - \int_{(\delta)} \mu \cos(Nx) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{20}} d\sigma - \int_{(\delta)} \frac{\partial\mu}{\partial\xi} \cos(Nx) \frac{d\sigma}{r_{20}} + \int_{(D)} \frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2} \frac{d\tau}{r_{20}},$$

и таким же образом

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = - \int_{(\delta)} \mu \cos(Ny) \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r_{20}} d\sigma - \int_{(\delta)} \frac{\partial\mu}{\partial\eta} \cos(Ny) \frac{d\sigma}{r_{20}} + \int_{(D)} \frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2} \frac{d\tau}{r_{20}},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = - \int_{(\delta)} \mu \cos(Nz) \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r_{20}} d\sigma - \int_{(\delta)} \frac{\partial\mu}{\partial\xi} \cos(Nz) \frac{d\sigma}{r_{20}} + \int_{(D)} \frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2} \frac{d\tau}{r_{20}}.$$

Складывая почленно эти равенства, найдем:

$$\Delta P = - \int_{(\delta)} \mu \frac{(\cos r_{20} N)}{r_{20}^2} d\sigma - \int_{(\delta)} \frac{\partial\mu}{\partial n} \frac{d\sigma}{r_{20}} + \int_{(D)} \Delta\mu \frac{d\tau}{r_{20}}.$$

Это последнее равенство получено в предположении, что вторые производные функции μ непрерывны; мы были обязаны сделать это предположение, так как мы не обобщили формулу Грина на случай функций, имеющих не непрерывные, а лишь ограниченные и интегрируемые производные. Если это обобщение сделано, можно заключить, что последняя формула справедлива, когда вторые производные функции μ ограничены и интегрируемы.

Если точка m_0 внутри (D_i) , последнее равенство нам дает:

$$\mu = -\frac{1}{4\pi} \int_{(D)} \Delta \mu \frac{d\tau}{r_{20}} + \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \mu \frac{\cos(r_{20}N)}{r_{20}^2} d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{d\mu_i}{dn} \frac{d\sigma}{r_{20}}. \quad (62)$$

Если точка m_0 вне (D_i) , то

$$0 = -\frac{1}{4\pi} \int_{(D)} \Delta \mu \frac{d\tau}{r_{20}} + \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \mu \frac{\cos(r_{20}N)}{r_{20}^2} d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{d\mu_i}{dn} \frac{d\sigma}{r_{20}}. \quad (63)$$

Формула (62) позволяет представить всякую функцию, определенную в (D_i) и обладающую там вторыми производными, в виде суммы трех потенциалов.

Заканчивая, предположим, что функция μ удовлетворяет следующим трем условиям:

1°. Первые производные функции μ непрерывны во всем пространстве.

2°. Во всякой точке, не лежащей на границе, функция μ имеет вторые производные, и эти последние ограничены и непрерывны.

3°. Вне (D) μ — гармоническая.

Вследствие условия 1° имеем на границе:

$$\frac{d\mu_e}{dn} = \frac{d\mu_i}{dn}.$$

Если точка m_0 вне (D) , то так как μ там гармоническая, имеем:

$$\mu = -\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \mu \frac{\cos(r_{20}N)}{r_{20}^2} d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{d\mu_i}{dn} \frac{d\sigma}{r_{20}}. \quad (63')$$

Если точка m_0 внутри (D) , то

$$0 = -\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \mu \frac{\cos(r_{20}N)}{r_{20}^2} d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{d\mu_i}{dn} \frac{d\sigma}{r_{20}}. \quad (62')$$

Складывая почленно формулы (63') и (62') с формулами (63) и (62), убеждаемся, что всюду имеем:

$$\mu = -\frac{1}{4\pi} \int_{(D)} \Delta u \frac{d\tau}{r_{z0}}.$$

§ 18. Классы функций $H(l, A, \lambda)$ и поверхности L_k

Для упрощения записи и формулировки рассматриваемых ниже теорем введем следующие определения и обозначения.

Если функция $f(x, y, z) = f(m)$, определенная в области (D) , ограничена и имеет ограниченные непрерывные производные до порядка l ($l \geq 0$), причем производные порядка l правильно непрерывны, г. е. если

$$\left| \frac{\partial^p f}{\partial x^{p_1} \partial y^{p_2} \partial z^p} \right| < A \quad \left(\begin{matrix} p_1 + p_2 + p_3 = p \\ p = 0, 1, 2, \dots, l \end{matrix} \right) \quad (64)$$

и для любой пары точек m_1 и m_2 из (D) , расстояние r_{12} между которыми меньше некоторого числа $r_0 \leq 1$, имеет место неравенство:

$$\left| \left(\frac{\partial^l f}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2} \partial z^{l_3}} \right)_{m_1} - \left(\frac{\partial^l f}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2} \partial z^{l_3}} \right)_{m_2} \right| < A r_{12}^\lambda, \quad (0 < \lambda \leq 1), \quad (65)$$

где числа A и λ не зависят от выбранных точек, то будем говорить, что функция f принадлежит классу $H(l, A, \lambda)$ в (D) , и будем записывать $f \in H(l, A, \lambda)$.

Замечая, что при ортогональных преобразованиях координат производная какого-либо порядка от f в одной системе является линейной комбинацией с ограниченными коэффициентами производных того же порядка от f в другой системе, приходим легко к выводу, что выполнение неравенств (64) и (65) в одной системе обеспечивает выполнение аналогичных неравенств в любой другой системе декартовых координат, причем A заменяется на cA , где $c > 1$ и зависит только от l . Так как для последующих рассуждений этот множитель c для нас будет несущественен, то будем считать, что неравенства (64) и (65) выполняются в любой системе, если установлено, что они выполняются для некоторой.

Аналогично определение класса $H(l, A, \lambda)$ для функции двух переменных.

Пусть теперь (S) замкнутая поверхность Ляпунова и N внешняя нормаль к ней. Произвольную точку m_0 на (S) примем за начало местной декартовой системы координат ξ, η, ζ , направив ось ζ по нормали N_0 в точке m_0 и зафиксировав как-нибудь оси ξ, η в касательной плоскости. Тогда из § 1 (I) следует, что часть (Σ) поверхности (S) внутри сферы Ляпунова с центром в m_0 пересекается каждой прямой, параллельной оси ζ не более одного раза и проектируется на плоскость (ξ, η) в область, содержащую круг Δ_0 с центром в m_0 и радиуса $d_0 = \frac{7}{9}d$. Через (Σ_0) обозначим часть (Σ) , проектируемую в (Δ_0) . В дальнейшем будем считать для простоты $d_0 \leq \frac{1}{2}$; тогда расстояние между двумя любыми точками (Δ_0) не превышает 1.

Пусть на (S) задана функция μ . Если ξ, η, ζ координаты точки m на (Σ_0) , то, положив $\mu(\xi, \eta) = \mu(m)$, определим в (Δ_0) μ как функцию от ξ, η .

Будем говорить, что функция μ , определенная на (S) , принадлежит классу $H(l, A, \lambda)$ на (S) , если $\mu(\xi, \eta) \in H(l, A, \lambda)$ в (Δ_0) , и если A и λ не зависят от выбора точки m_0 .

Пусть m_1 и m_2 две точки на (Σ_0) и r расстояние между ними. Обозначая через ρ проекцию отрезка $m_1 m_2$ на плоскость ξ, η , имеем:

$$\rho < r < \frac{r}{\sin \omega} < 2\rho,$$

и поэтому $\rho^\lambda < r^\lambda < 2^\lambda \rho^\lambda$. Отсюда следует, что функция правильно непрерывная на (S) , принадлежит классу $H(0, A, \lambda)$ и, наоборот, функция класса $H(0, A, \lambda)$ правильно непрерывна на (S) .

Если функция $f(x, y, z) \in H(0, A, \lambda)$ в (D_i) , т. е. правильно непрерывна в D_i , то, как это было показано в § 2 (I), ее предельное значение (f) на (S) правильно непрерывно на (S) и, следовательно, $(f) \in H(0, cA, \lambda)$ на (S) .

Очевидны следующие свойства функций из $H(l, A, \lambda)$.

1) Если $\mu_1 \in H(l, A_1, \lambda)$, $\mu_2 \in H(l, A_2, \lambda)$, то

$$a) \mu_1 + \mu_2 \in H(l, A_1 + A_2, \lambda),$$

$$б) \mu_1 \cdot \mu_2 \in H(l, cA_1 A_2, \lambda),$$

где $c > 1$ и зависит только от l .

2) Если $\mu \in H(l, A, \lambda)$, то $\mu \in H(l, A, \lambda')$, где λ' — произвольное число из промежутка $0 < \lambda' < \lambda$.

3) Если $\mu \in H(l, A, \lambda)$ на (S) , ($l \geq 1$), то $\mu \in H(l', A\sqrt{2}, 1)$ на (S') , где $0 \leq l' < l$ любое целое число. Если область (D) выпукла, то аналогичное свойство имеет место и для функции $f \in H(l, A, \lambda)$ в (D) , только $A\sqrt{2}$ следует заменить на $A\sqrt{3}$. Если область (D) ограничена поверхностью Ляпунова, то, как это следует из § 2 (I), получим:

$$f \in H\left(l', \frac{2\sqrt{3}A}{\sin \omega}, 1\right).$$

Перейдем к следующему определению. Уравнение (Σ_0) в метрической системе координат ξ, η, ζ имеет вид:

$$\zeta = F(\xi, \eta). \quad (66)$$

Будем говорить, что (S) принадлежит классу $\mathcal{L}_k(B, \lambda)$, если $F(\xi, \eta) \in H(k, B, \lambda)$ и числа B и λ не зависят от выбора точки m_0 .

Поверхности Ляпунова суть поверхности класса $\mathcal{L}_1(B, \lambda)$. Пусть x, y, z фиксированная система декартовых координат.

Лемма 1. Если $(S) \in \mathcal{L}_k(B, \lambda)$, то $\cos(Nx) \in H(k-1, c, \lambda)$, где число c зависит только от B и k .

Пусть m_0 некоторая точка (S) и ξ, η, ζ местные координаты. Так как

$$\begin{aligned} \cos(Vx) = & \cos(V\xi)\cos(\xi, x) + \cos(N\xi)\cos(\eta, x) + \\ & + \cos(N\zeta)\cos(\zeta, x), \end{aligned}$$

а $\cos(\xi, x), \cos(\eta, x), \cos(\zeta, x)$ для фиксированной системы ξ, η постоянны и меньше по модулю единицы, то достаточно доказать, что в (Λ_0)

$$\begin{aligned} \cos(N\xi) \in H(k-1, c_1, \lambda), \quad \cos(V\eta) \in H(k-1, c_2, \lambda), \\ \cos(N\zeta) \in H(k-1, c_3, \lambda), \end{aligned}$$

где c_1, c_2, c_3 зависят только от B и k . Имеем

$$\cos(N\xi) = \frac{-F'_\xi}{\sqrt{1 + F'^2_\xi + F'^2_\eta}},$$

откуда вытекает, что $\cos(N\xi)$ как функция от ξ, η имеет в (Λ_0) непрерывные производные до порядка $k-1$.

Пусть q означает число различных производных до порядка k от $F(\xi, \eta)$. Обозначим

$$\alpha_1 = F'_\xi, \quad \alpha_2 = F'_\eta, \quad \alpha_3 = F''_{\xi\xi}, \quad \dots, \quad \alpha_q = F'_{\eta k}.$$

Тогда имеем:

$$\frac{\partial^l \cos(N\xi)}{\partial \xi^{l_1} \partial \eta^{l_2}} = \frac{R_{l, l_2}(\alpha_1, \dots, \alpha_q)}{(V \sqrt{1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2})^{l+1}} = \Phi_{l, l_2}(\alpha_1, \dots, \alpha_q),$$

где R_{l, l_2} есть целая рациональная функция своих аргументов и поэтому $\Phi_{l, l_2}(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ является ограниченной и имеющей ограниченные первые производные в области $|\alpha_i| < B$. Пусть c'_1 есть максимум всех $|\Phi_{l, l_2}(\alpha_1, \dots, \alpha_q)|$ для $|\alpha_i| < B$ и $l_1 + l_2 \leq k - 1$, а c''_1 есть максимум всех $\left| \frac{\partial \Phi_{k, k_2}}{\partial \alpha_i} \right|$ для $|\alpha_i| \leq B$ и $k_1 + k_2 = k - 1$.

Обозначая через α'_i и α''_i значения α_i в точках (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2) из (Λ_0) , имеем:

$$|\alpha'_i - \alpha''_i| < B \sqrt{2} \rho_{12}^\lambda, \quad \text{где} \quad \rho_{12} = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{\partial^{k-1} \cos(N\xi)}{\partial \xi^{k_1} \partial \eta^{k_2}} \right)_{(\xi_1, \eta_1)} - \left(\frac{\partial^{k-1} \cos(N\xi)}{\partial \xi^{k_1} \partial \eta^{k_2}} \right)_{(\xi_2, \eta_2)} \right| = \\ & = \left| \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial \Phi_{k, k_2}}{\partial \alpha_i} \right)' (\alpha'_i - \alpha''_i) \right| < q V \sqrt{2} C''_1 B \rho_{12}^\lambda. \end{aligned}$$

Обозначая через c_1 большее из чисел c'_1 и $q V \sqrt{2} c''_1 B$, заключим, что $\cos(N\xi) \in H(k-1, c_1, \lambda)$. Аналогично доказываем для $\cos(N\eta)$ и $\cos(N\xi)$. Тогда $\cos(Nx) \in H(k-1, c, \lambda)$, где $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$. Аналогично: $\cos(Ny) \in H(k-1, c, \lambda)$, $\cos(Nz) \in H(k-1, c, \lambda)$.

Лемма 2. Если $\mu \in H(l, A, \lambda')$ на (S) и $(S) \in \mathcal{L}_k(B, \lambda)$, где $\lambda' \leq \lambda$, $l \leq k$, то

$$\mathcal{D}_x \mu \in H(l-1, aA, \lambda'), \quad (67)$$

где a зависит только от B и k .

Пусть m_0 точка на (S) , ξ, η, ζ — местные координаты. Тогда для μ на (Σ_0) имеем $\mu = \mu(\xi, \eta)$.

Рассматривая $\mu(\xi, \eta)$ как функцию, не зависящую от ζ , но определенную в цилиндре с основанием (Δ_0) и осью $O\zeta$, получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x \mu = \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right) - \frac{\partial \mu}{\partial n} \cos(Nx) &= \left[\frac{\partial \mu}{\partial \xi} \cos(\xi, x) + \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \cos(\eta, x) \right] - \\ &- \left[\frac{\partial \mu}{\partial \xi} \cos(N\xi) + \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \cos(N\eta) \right] \cos(Nx). \end{aligned} \quad (68)$$

Очевидно $\frac{\partial \mu}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial \mu}{\partial \eta} \in H(l-1, A, \lambda')$ в (Δ_0) . Кроме того, в (Δ_0)

$$\cos(N\xi), \cos(N\eta), \cos(Nx) \in H(k-1, c, \lambda)$$

и, следовательно, в (Δ_0)

$$\cos(N\xi), \cos(N\eta), \cos(Nx) \in H(l-1, c\sqrt{2}, \lambda'),$$

где c зависит только от B и k .

Пользуясь свойствами 1а и 1б для суммы и произведения функций из $H(l, A, \lambda)$, а также тем, что $\cos(\xi, x)$ и $\cos(\eta, x)$ постоянны и по модулю не больше единицы, найдем из (68):

$$\mathcal{D}_x \mu \in H(l-1, 2A + 2cA(C\sqrt{2})^2, \lambda')$$

и, следовательно, имеем (67), где $a = 2 + 4cC$.

Будем обозначать через (f) предельные значения на (S) функции, определенной в (D_i) или в (D_e) .

Лемма 3. Если $(S) \in \mathcal{L}_k(B, \lambda)$ и $f(x, y, z) \in H(l, A, \lambda)$ в (D_i) , где $l \leq k$, то $(f) \in H(l, cA, \lambda)$ на (S) , где c зависит только от B и l .

В самом деле, пусть ξ, η, ζ местная система координат с началом в некоторой точке m_0 на (S) . При достаточно малом положительном ε поверхность

$$\zeta = F(\xi, \eta) - \varepsilon$$

лежит внутри (D_i) . Обозначая $f_\varepsilon(\xi, \eta) = f(\xi, \eta, F(\xi, \eta) - \varepsilon)$, получим для (f) на (Σ_0) :

$$(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(\xi, \eta).$$

Функция $f_\varepsilon(\xi, \eta)$ имеет в (Δ_0) непрерывные производные по ξ и η порядка l , причем f_ε и ее производные до порядка l при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно стремятся к (f) и соответствующим производным по ξ и η от (f) , рассматриваемой как функция в (Δ_0) . Каждая производная от (f) является, таким образом, суммой конечного числа слагаемых вида

$$\varphi(\xi, \eta) = \left(\frac{\partial^p f}{\partial \xi^{p_1} \partial \eta^{p_2} \partial \zeta^{p_3}} \right) \prod_{i=1}^{p_1} \frac{\partial^{s_i} f}{\partial \xi^{s_i} \partial \eta^{s_i}}, \quad \begin{matrix} 1 \leq p \leq l \\ p_1 + p_2 + \sum s_i \leq l. \end{matrix}$$

Лемма будет доказана, если показать, что $\varphi(\xi, \eta) \in H(0, cA, \lambda)$.

Производная $\frac{\partial^p f}{\partial \xi^{p_1} \partial \eta^{p_2} \partial \zeta^{p_3}}$ правильно непрерывна в (D_i) и ее предельное значение есть правильно непрерывная функция на (S) .

Поэтому

$$\left(\frac{\partial^p f}{\partial \xi^{p_1} \partial \eta^{p_2} \partial \zeta^{p_3}} \right) \in H(0, c_1 A, \lambda) \quad \text{в } (\Delta_0).$$

Кроме того,

$$\frac{\partial^{s_i} f}{\partial \xi^{s_i} \partial \eta^{s_i}} \in H(0, B, \lambda) \quad \text{в } (\Delta_0).$$

Поэтому

$$\varphi(\xi, \eta) \in H(0, c_2 A, \lambda) \quad \text{в } (\Delta_0),$$

где c_2 зависит только от B и l . Так как производная до порядка l от (f) есть сумма конечного числа таких функций $\varphi(\xi, \eta)$, то отсюда следует, что все производные до порядка l ограничены числом вида $c_2 A$. Этим лемма доказана.

§ 19. Потенциалы простого и двойного слоя для L_k

Обозначим через $V[\mu]$ потенциал простого слоя с плотностью μ и через $W[\mu]$ потенциал двойного слоя с плотностью μ . Пусть $\mu \in H(0, A, \lambda)$, т. е. правильно непрерывна на (S) . Тогда теорема 3 § 3 принимает вид:

Теорема 1. Если $\mu \in H(0, A, \lambda)$ на (S) и $(S) \in \mathcal{L}_1(B, \lambda)$, то

$$W[\mu] \in H(0, cA, \lambda') \quad \text{в } (D_i) \text{ и в } (D_e),$$

где λ' произвольно ($\lambda' < \lambda$), а c зависит только от B и выбора λ' .

Аналогично теорема § 7 принимает вид:

Теорема 2. Если $\mu \in H(0, A, \lambda)$ на (S) и $(S) \in \mathcal{L}_1(B, \lambda)$, то

$$V[\mu] \in H(1, cA, \lambda') \text{ в } (D_i) \text{ и в } (D_e).$$

Напомним также результаты § 8 и 10. Именно, результат § 8 таков:

если μ дифференцируема на (S) , и (S) имеет непрерывные элементы кривизны, то

$$\frac{\partial V[\mu]}{\partial x} = V[\mathcal{D}_x \mu - \mu K \cos(Nx)] + W[\mu \cos(Nx)]. \quad (69)$$

Результат § 10 таков:

если μ дифференцируема на (S) , и $(S) \in \mathcal{L}_1$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial W[\mu]}{\partial x} = & \frac{\partial}{\partial y} V[\cos(Ny) \mathcal{D}_x \mu - \cos(Nx) \mathcal{D}_y \mu] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} V[\cos(Nz) \mathcal{D}_x \mu - \cos(Nx) \mathcal{D}_z \mu]. \end{aligned} \quad (70)$$

Пользуясь теоремами 1 и 2 и формулами (69) и (70), докажем теоремы.

Теорема 3. Если $(S) \in \mathcal{L}_{k+1}(B, \lambda)$ ($k \geq 0$) и $\mu \in H(l, A, \lambda)$ на (S) , ($0 \leq l \leq k+1$), то

$$W[\mu] \in H(l, cA, \lambda') \text{ в } (D_i) \text{ и в } (D_e).$$

Теорема 4. Если $(S) \in \mathcal{L}_{k+1}(B, \lambda)$ ($k \geq 0$) и $\mu_1 \in H(l_1, A, \lambda)$ на (S) , ($0 \leq l_1 \leq k$), то

$$V[\mu_1] \in H(l_1+1, cA, \lambda') \text{ в } (D_i) \text{ и в } (D_e).$$

Обе теоремы будем доказывать одновременно. Заметим, что теорема 1 есть частный случай теоремы 3 ($l=0$, $k=0$), а теорема 2 есть частный случай теоремы 4 ($l_1=0$, $k=0$). Так как поверхность класса \mathcal{L}_{k+1} принадлежит классу \mathcal{L}_1 , то теоремы 3 и 4 доказаны для $l=0$, $l_1=0$, $k \geq 1$. Остается рассмотреть случай $l \neq 0$ и $l_1 \neq 0$, $k \geq 1$.

Справедливы два утверждения:

1) Если теорема 4 верна для некоторого l_1 , ($0 \leq l_1 \leq k$), то теорема 3 верна для $l = l_1 + 1$.

2) Если теорема 4 верна для некоторого l'_1 , $0 \leq l'_1 \leq k-1$, а теорема 3 верна для $l = l'_1 + 1$, то теорема 4 верна для $l_1 = l'_1 + 1 \leq k$.

Мы докажем эти утверждения позже, а сейчас, пользуясь ими, докажем теоремы 3 и 4.

Действительно, так как теорема 4 для $l_1 = 0$ верна, то из первого утверждения следует справедливость теоремы 3 для $l = 1$. Тогда из теоремы 2, доказанной сейчас теоремы 3 для $l = 1$ и из второго утверждения следует теорема 4 для $l_1 = 1$. После этого на основании первого утверждения следует теорема 3 для $l = 2$ и на основании второго утверждения теорема 4 для $l_1 = 2$. Эти рассуждения можно продолжать до тех пор, пока $l_1 \leq k$ и $l \leq k+1$.

Таким образом, осталось доказать утверждения 1) и 2).

Докажем первое утверждение. Пусть $\mu \in H(l_1 + 1, A, \lambda)$, $(0 \leq l_1 \leq k)$. На основании лемм 1 и 2 § 18 заключаем, что

$$\cos(Nx), \cos(Ny), \cos(Nz) \in H(k, c_1, \lambda),$$

и так как $l_1 \leq k$, то

$$\cos(Nx), \cos(Ny), \cos(Nz) \in H(l_1, c_2, \lambda).$$

Кроме того, так как $l_1 + 1 \leq k + 1$, то

$$\mathcal{D}_x \mu, \mathcal{D}_y \mu, \mathcal{D}_z \mu \in H(l_1, c_3 A, \lambda).$$

Поэтому

$$\cos(Ny) \mathcal{D}_x \mu, \cos(Nx) \mathcal{D}_y \mu, \dots, \in H(l_1, c_4 A, \lambda),$$

и в силу предположенной справедливости теоремы 4 для l_1 заключаем:

$$V[\cos(Ny) \mathcal{D}_x \mu - \cos(Nx) \mathcal{D}_y \mu],$$

$$V[\cos(Nz) \mathcal{D}_x \mu - \cos(Nx) \mathcal{D}_z \mu] \in H(l_1 + 1, c_5 A, \lambda'),$$

откуда, в силу формулы (70), следует:

$$\frac{\partial W[\mu]}{\partial x} \in H(l_1, 2c_5 A, \lambda'). \quad (71)$$

Нетрудно видеть, что существует постоянная $c_6 > 0$ такая, что

$$|W[\mu]| < c_6 A. \quad (72)$$

Действительно, $W[\mu]$ гармоническая внутри (D_i) и (D_e) , и поэтому максимум $|W[\mu]|$ достигается на (S) . Последний же

не превосходит

$$A \left[2\pi + \max_{(S)} \int \frac{|\cos(r_{10}N_1)|}{r_{10}^2} d\sigma_1 \right], \quad m_0 \text{ на } (S).$$

Обозначая через c большее из чисел $2c_5$ и c_6 , на основании (71) и (72) заключим:

$$W[\mu \in H(l_1 + 1, cA, \lambda'), \quad (73)$$

и таким образом первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть $\mu_1 \in H(l'_1 + 1, A, \lambda)$, $(0 \leq l'_1 \leq k - 1)$. Тогда $\mu_1 \cos(Nx) \in H(l'_1 + 1, c_1A, \lambda)$, так как $l'_1 + 1 \leq k$, и, следовательно, $\cos(Nx) \in H(l'_1 + 1, c, \lambda)$. Вследствие предположения о справедливости теоремы 3 для $l = l'_1 + 1$, заключаем:

$$W[\mu_1 \cos(Nx)] \in H(l'_1 + 1, c_2A, \lambda') \text{ в } (D_i) \text{ и в } (D_e). \quad (74)$$

Далее имеем

$$\mathcal{D}_x \mu_1 \in H(l'_1, c_3A, \lambda).$$

Мы предполагаем $k \geq 1$. Поэтому $k + 1 \geq 2$ и, следовательно, (S) имеет непрерывные элементы кривизны, так что формула (69) применима. Так как $\cos(Nx)$, $\cos(Ny)$, $\cos(Nz) \in H(k, c, \lambda)$, то

$$K = \mathcal{D}_x \cos(Nx) + \mathcal{D}_y \cos(Ny) + \mathcal{D}_z \cos(Nz) \in H(k - 1, c_4, \lambda).$$

Следовательно, так как $l'_1 \leq k - 1$,

$$\cos(Nx), \cos(Ny), \cos(Nz), K \in H(l'_1, c_5, \lambda),$$

и поэтому

$$\mu_1 K \cos(Nx) \in H(l'_1, c_6, \lambda).$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{D}_x \mu_1 - \mu_1 K \cos(Nx) \in H(l'_1, c_7, \lambda).$$

В силу предположенной справедливости теоремы 4 для l'_1 , заключаем:

$$V[\mathcal{D}_x \mu_1 - \mu_1 K \cos(Nx)] \in H(l'_1 + 1, c_8A, \lambda') \text{ в } (D_i) \text{ и в } (D_e).$$

Отсюда, используя (69) и (74), находим:

$$\frac{\partial V[\mu_1]}{\partial x} \in H(l_1, c_9 A, \lambda') \text{ в } (D_i) \text{ и в } (D_e), \quad l_1 = l'_1 + 1. \quad (75)$$

Так как $V[\mu_1]$ гармоническая внутри (D_i) и внутри (D_e) , то $|V[\mu_1]|$ достигает максимума на (S) . Поэтому

$$|V[\mu]| \leq A \max_{(S)} \int \frac{d\sigma_1}{r_{10}} = c_{10} A, \quad m_0 \text{ на } (S). \quad (76)$$

Обозначая через c большее из чисел c_9 и c_{10} , находим из (75) и (76):

$$V[\mu_1] \in H(l_1 + 1, cA, \lambda') \quad (77)$$

и утверждение 2) доказано. Теоремы 3 и 4 доказаны.

§ 20. Ньютонов потенциал в области, ограниченной поверхностью \mathcal{L}_k

Ньютонов потенциал с плотностью μ будем обозначать $P[\mu]$. Тогда теорема § 16 может быть прочтена так:

Теорема 1. Если $\mu \in H(0, A, \lambda)$ в (D_i) , и D_i ограничена поверхностью $(S) \in \mathcal{L}_1(B, \lambda)$, то

$$P[\mu] \in H(2, cA, \lambda'). \quad (78)$$

Кроме того, формула (61) § 17 для первой производной ньютонова потенциала с дифференцируемой плотностью примет вид:

$$\frac{\partial P[\mu]}{\partial x} = P\left[\frac{\partial \mu}{\partial x}\right] - V[\mu \cos(Nx)]. \quad (79)$$

Докажем следующую теорему:

Теорема 2. Если $(S) \in \mathcal{L}_{k+1}(B, \lambda)$, $\mu \in H(l, A, \lambda)$, где $0 \leq l \leq k$, то

$$P[\mu] \in H(l + 2, cA, \lambda') \text{ в } (D_i) \text{ и в } (D_e),$$

где λ' произвольно ($0 < \lambda' < \lambda$), а c зависит от B и выбора λ' .

Теорема 2 содержит как частный случай теорему 1 ($l = k = 0$), и этим теорема 2 доказана для $l = 0$, $k \geq 1$.

Пусть теперь $k \geq 1$. Покажем, что теорема справедлива для $\mu \in H(l, A, \lambda)$ ($1 \leq l \leq k$), если предположить ее справедливой для $\mu \in H(l - 1, A, \lambda)$ в (D_i) .

Действительно, если $\mu \in H(l, A, \lambda)$ в (D_i) , то

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} \in H(l-1, A, \lambda) \text{ в } (D_i),$$

и в силу предположенной справедливости теоремы для $\mu \in H(l-1, A, \lambda)$ заключаем:

$$P \left[\frac{\partial \mu}{\partial x} \right] \in H(l+1, c_1 A, \lambda') \text{ в } (D_i) \text{ и в } (D_e). \quad (80)$$

Так как $\mu \in H(l, A, \lambda)$ в (D_i) , то в силу леммы 3 § 18 $(\mu) \in H(l, c_2 A, \lambda)$ на (S) . Так как $l \leq k+1$, то в силу леммы § 18 $\cos(Nx) \in H(k, c_3, \lambda)$ и тем самым $\cos(Nx) \in H(l, c_4, \lambda)$ и поэтому

$$\mu \cos(Nx) \in H(l, c_5 A, \lambda) \text{ на } (S).$$

Отсюда, в силу теоремы 4 § 19, заключаем:

$$V[\mu \cos(Nx)] \in H(l+1, c_6 A, \lambda') \text{ в } (D_i) \text{ и в } (D_e). \quad (81)$$

На основании формул (79), (80) и (81) заключаем:

$$\frac{\partial P[\mu]}{\partial x} \in H(l+1, c_7 A, \lambda'). \quad (82)$$

Нетрудно видеть, что существует постоянная $c_8 > 0$, что

$$|P[\mu]| < c_8 A \text{ в } (D_i) \text{ и в } (D_e). \quad (83)$$

Действительно, $P[\mu]$ есть функция гармоническая внутри (D_e) и, следовательно, максимум $|P[\mu]|$ достигает либо на (S) , либо внутри (D_i) . Последний же не превосходит

$$A \cdot \max_{(D_i)} \int \frac{d\tau}{r_{10}} = c_8 A, \quad m_0 \text{ на } (S) \text{ или в } (D_i).$$

Обозначая через c большую из постоянных c_7 и c_8 , заключаем из (82) и (83):

$$P[\mu] \in H(l+2, cA, \lambda'),$$

если теорема 2 справедлива для $\mu \in H(l-1, A, \lambda)$ в (D_i) .

Так как для $\mu \in H(0, A, \lambda)$ теорема 2 доказана, то она верна для $\mu \in H(l, A, \lambda)$, где $l = 1, 2, \dots, k$.

§ 21. Прямые значения потенциала двойного слоя и нормальной производной потенциала простого слоя на L_k

В § 3 и 5 была доказана правильная непрерывность потенциала двойного слоя и нормальной производной потенциала простого слоя, рассматриваемых как функция точки на (S) , при условии, что плотность μ ограничена. Именно были доказаны теоремы:

Теорема 1. Если $(S) \in \mathcal{L}_1$ и $|\mu| < A$ на (S) , то $\bar{W}[\mu] \in H(0, cA, \lambda')$ на (S) .

Теорема 2. Если $(S) \in \mathcal{L}_1$ и $|\mu| < A$ на (S) , то $\frac{dV[\mu]}{dn} \in H(0, cA, \lambda')$ на (S) .

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 3. Если $(S) \in \mathcal{L}_{l+2}(B, \lambda)$, $\mu \in H(l, A, \lambda)$ на (S) , $(l \geq 0)$, то

$$\bar{W}[\mu] \in H(l+1, cA, \lambda') \text{ на } (S).$$

Теорема 4. Если $(S) \in \mathcal{L}_{l+2}(B, \lambda)$, $\mu \in H(l, A, \lambda)$ на (S) , $(l \geq 0)$, то

$$\frac{dV[\mu]}{dn} \in H(l+1, cA, \lambda') \text{ на } (S).$$

Доказательство теорем 3 и 4 довольно сложно и помещено в дополнении IV.

§ 22. Замечания о потенциалах класса $C^{(k)}$

Будем говорить, что функция $f(x, y, z) = f(m)$, определенная в области (D) , принадлежит классу $C^{(k)}(A)$, если f имеет в области (D) непрерывные и ограниченные производные порядка k ($k \geq 1$) и эти производные и сама функция не превосходят по модулю числа A .

Если область (D) ограничена поверхностью Ляпунова, то производные порядка $k-1$ функции f правильно непрерывны в (D) и, следовательно, $f \in H(k-1, cA, 1)$, где c некоторая постоянная, зависящая лишь от вида области. Наоборот, если $f \in H(k, A, \lambda)$, то тем самым $f \in C^{(k)}(A)$, какова бы ни была область (D) . Если f непрерывна и ограничена в (D) , то будем писать $f \in C^{(0)}(A)$.

Аналогичное определение даем для функции двух переменных.

Будем говорить, что функция μ , заданная на (S) , принадлежит $C^{(k)}(A)$, если $\mu(\xi, \eta)$ принадлежит $C^{(k)}(A)$ в (Λ_0) , и A не зависит от выбора точки m_0 на (S) .

Будем говорить, что поверхность (S) принадлежит классу $C^{(k)}(B)$ ($k \geq 2$), если $F(\xi, \eta)$ принадлежит классу $C^{(k)}(B)$ в (Λ_0) , и B не зависит от выбора точки m_0 на (S) .

Из теорем § 19, 20, 21 вытекают следующие теоремы для функций и поверхностей класса $C^{(k)}$. *

Теорема 1. Если $(S) \in C^{(k+1)}$ ($k \geq 1$) и $\mu \in C^{(l)}(A)$ на (S) , ($1 \leq l \leq k+1$), то

$$W[\mu] \in C^{(l-1)}(cA) \text{ в } (D_i) \text{ и в } (D_e).$$

Кроме того, если $\mu \in C^{(0)}(A)$, то

$$W[\mu] \in C^{(0)}(cA) \text{ в } (D_i) \text{ и в } (D_e).$$

Действительно утверждение для $l \geq 1$ следует из теоремы 3 § 19, так как из $\mu \in C^{(l)}$ следует $\mu \in H(l-1, cA, 1)$; для $l=0$ следует из того, что потенциал двойного слоя с непрерывной плотностью непрерывен и ограничен по модулю числом cA .

Теорема 2. Если $(S) \in C^{(k+1)}$ ($k \geq 1$) и $\mu \in C^{(l)}$ ($0 \leq l \leq k$), то

$$V[\mu] \in C^{(l)}(cA) \text{ в } (D_i) \text{ и в } (D_e).$$

Для $l \geq 1$ утверждение следует из теоремы 4 § 19; для $l=0$ следует из того, что потенциал простого слоя с ограниченной плотностью непрерывен и ограничен по модулю числом cA .

Легко привести примеры таких $\mu \in C^{(l)}$, что производные порядков l или $l+1$ от $W[\mu]$ или $V[\mu]$ соответственно неограничены в (D_i) и в (D_e) и не принадлежат классам $C^{(l)}$ и $C^{(l+1)}$ соответственно.

* Теоремы 1, 2, 3 этого параграфа были доказаны Е. Шмидтом (E. Schmidt) в статье „Bemerkung zur Potentialtheorie“ (Mathematische Abhandlungen Hermann Amandus Schwarz zu seinem fünfzig-jährigen Doktorjubiläum, Berlin, 1914). В этой статье применен метод математической индукции, который нами использован в § 19 и 20.

Теорема 3. Если $(S) \in C^{(k+1)}$ ($k \geq 1$) и $\mu \in C^{(l)}(A)$ в (D_i) , ($0 \leq l \leq k$), то

$$P[\mu] \in C^{(l+1)}(cA) \text{ в } (D_i) \text{ и в } (D_e).$$

Для $l \geq 1$ теорема следует из теоремы § 20; для $l = 0$ следует из теоремы о правильной непрерывности во всем пространстве ньютонова потенциала с ограниченной плотностью.

Наконец, из теорем § 21 следует

Теорема 4. Если $(S) \in C^{(l+2)}(B)$ и $\mu \in C^{(l)}(A)$ на (S) , ($l \geq 0$), то

$$W[\mu] \text{ и } \frac{dV[\mu]}{dn} \in C^{(l)}(cA) \text{ на } (S).$$

§ 23. Потенциалы простого и двойного слоя с суммируемой плотностью

Прежде чем изучать свойства потенциала простого слоя с суммируемой плотностью, изложим без доказательства те свойства суммируемых функций и интеграла Лебега, которые нам понадобятся в последующем. При этом мы не даем определения суммируемых функций и интеграла Лебега, отсылая читателя, например, к V тому „Курса высшей математики“ В. И. Смирнова или к „Теории функций вещественного переменного“ И. П. Натансона.

Необходимые нам свойства суммируемых функций будем, для определенности, формулировать для функций, определенных и суммируемых на (S) , притом в форме, необходимой нам для последующего.

1. Неравенство для модуля интеграла. Пусть μ суммируема на (S) , а f непрерывна и по модулю не превосходит A : $|f| \leq A$. Тогда μf суммируема и

$$\left| \int_{(S)} \mu f d\sigma \right| < A \int_{(S)} |\mu| d\sigma.$$

Отсюда непосредственно следует, что если непрерывная функция $f_h(m)$, определенная на (S) , зависит от параметра h и стремится равномерно при $h \rightarrow 0$ к непрерывной функции $f(m)$, то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{(S)} \mu f_h d\sigma = \int_{(S)} \mu f d\sigma.$$

2. Свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Если μ суммируема на (S) , то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое $\delta > 0$, что

$$\int_{(\delta)} |\mu| d\sigma < \varepsilon,$$

где δ — часть (S) внутри сферы радиуса δ с центром в любой точке поверхности (S) .

3. Точки Лебега суммируемой функции. Пусть m_0 некоторая точка (S) , и $0 < \delta \leq \frac{d}{2}$, где d радиус сферы Ляпунова. Через (δ, m_0) обозначим ту часть поверхности (S) , которая лежит внутри сферы Ляпунова с центром в m_0 и проектируется на касательную плоскость в точке m_0 в круг радиуса δ с центром в m_0 . Пусть μ суммируема на (S) . Точка m_0 называется точкой Лебега функции μ , если

$$\lim_{(\delta, m_0)} \frac{1}{\pi \delta^2} \int_{(\delta, m_0)} |\mu - \mu_0| d\sigma = 0,$$

где μ_0 — значение μ в точке m_0 .

Обозначим множество точек Лебега функции μ через Q_μ . Известно, что множество точек, не являющихся точками Лебега, имеет меру нуль, т. е. $\text{mes}(S - Q_\mu) = 0$.

4. Теорема Фубини. Пусть $F(1, 2)$ функция двух точек m_1 и m_2 поверхности (S) . Пусть $F(1, 2)$ суммируема как функция точки m_2 для всех m_1 , за исключением некоторого множества точек меры нуль, и суммируема как функция точки m_1 для всех m_2 , за исключением некоторого множества точек меры нуль. Рассмотрим интеграл

$$\varphi(1) = \int_{(S_2)} |F(1, 2)| d\tau_2,$$

являющийся функцией точки m_1 , причем этот интеграл может быть расходящимся для точек m_1 , образующих множество меры нуль.

Из теоремы Фубини о крапных интегралах Лебега можно сделать следующее заключение:

если функция $\varphi(1)$ суммируема на (S) , то для всех точек m_2 , за исключением множества меры нуль, существует

интеграл

$$\psi(2) = \int_{(S_1)} F(1, 2) d\sigma_1,$$

являющийся функцией, суммируемой на (S) . Кроме того, имеет место равенство

$$\int_{(S_1)} \left[\int_{(S_2)} F(1, 2) d\sigma_2 \right] d\sigma_1 = \int_{(S_2)} \left[\int_{(S_1)} F(1, 2) d\sigma_1 \right] d\sigma_2.$$

Аналогичные свойства имеют место для функций, суммируемых в (D) .

Перейдем к изучению потенциала простого слоя, плотность μ которого является суммируемой функцией на (S) , где (S) — поверхность Ляпунова.

Имеем

$$V(0) = \int_{(S)} \mu(1) \frac{d\sigma_1}{r_{10}}. \quad (84)$$

Если точка m_0 не лежит на (S) , то $\frac{1}{r_{10}}$ является на (S) непрерывной функцией точки m_1 , и интеграл (84) является сходящимся. Более того, отмеченное выше неравенство для модуля интеграла позволяет заключить, что $V(0)$ является функцией непрерывной и имеющей непрерывные производные любого порядка во всякой точке, не лежащей на (S) . Кроме того, $V(0)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и при неограниченном удалении точки m_0 $V(0)$ и его производные стремятся к нулю. Отсюда следует, что $V(0)$ является гармонической функцией во всякой области, лежащей вместе с границей в (D_i) или в (D_e) . Изучим поведение $V(0)$ при приближении точки m_0 к поверхности (S) .

Теорема 1. Пусть μ суммируема на (S) . Тогда интеграл (84) сходится, если точка m_0 на (S) не принадлежит некоторому множеству меры нуль на (S) . Кроме того, $V(0)$ является суммируемой функцией на (S) .

Действительно, положим

$$F(0, 1) = \frac{\mu(1)}{r_{10}}$$

и рассмотрим интеграл

$$\varphi(1) = \int_{(S_0)} |F(0, 1)| d\sigma_0 = \int_{(S_1)} \left| \frac{\mu(1)}{r_{10}} \right| d\tau_0 = |\mu(1)| \int_{(S_0)} \frac{d\sigma_0}{r_{10}}.$$

Так как интеграл

$$\int_{(S_0)} \frac{d\sigma_0}{r_{10}}$$

является непрерывной и ограниченной функцией точки m_1 на (S) , то $\varphi(1)$, как произведение этой функции на суммируемую функцию $|\mu(1)|$, является суммируемой функцией точки m_1 на (S) . На основании теоремы Фубини отсюда заключаем, что интеграл (84) сходится, если точка m_0 не принадлежит некоторому множеству меры нуль, зависящему от μ . Кроме того, заключаем, что $V(0)$ есть суммируемая функция на (S) . Множество точек, для которых интеграл (84) сходится, обозначим Q'_μ .

Теорема 2. Пусть точка m_0 принадлежит Q'_μ , а m_2 точка вне (S) лежит на нормали к (S) в точке m_0 . Тогда

$$\lim_{m_2 \rightarrow m_0} V(2) = V(0).$$

Действительно, так как m_0 не принадлежит Q'_μ , то $\frac{\mu(1)}{r_{10}}$ суммируема на (S) . По свойству абсолютной непрерывности интеграла Лебега суммируемой функции следует: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется $\delta > 0$, что

$$\int_{(\delta)} \left| \frac{\mu(1)}{r_{10}} \right| d\tau_1 < \varepsilon. \quad (85)$$

Обозначим через ρ проекцию r_{10} на касательную плоскость в точке m_0 . Какова бы ни была точка m_2 нормали N_0 в точке m_0 , очевидно, имеем для точек m_1 из (δ) :

$$\frac{r_{10}}{2} < \rho < r_{12},$$

откуда следует

$$\frac{1}{r_{12}} < \frac{2}{r_{10}}, \quad (86)$$

и поэтому

$$\int_{(\delta)} \left| \frac{\mu(1)}{r_{12}} \right| d\sigma_1 < 2\varepsilon \quad (87)$$

независимо от положения точки m_2 на N_0 .

Имеем

$$\begin{aligned} V(2) - V(0) = & \int_{(\delta)} \mu(1) \frac{d\sigma_1}{r_{12}} - \int_{(\delta)} \mu(1) \frac{1}{r_{10}} d\sigma_1 + \\ & + \int_{(S-\delta)} \mu(1) \left[\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{10}} \right] d\sigma_1. \end{aligned} \quad (88)$$

Модуль разности первых двух интегралов правой части (88) не превосходит 3ε . Последний интеграл правой части (88) является непрерывной функцией точки m_2 в некоторой окрестности точки m_0 и стремится к нулю при $m_2 \rightarrow m_0$. Поэтому можно указать $h > 0$ такое, что этот интеграл не превосходит ε , если $r_{20} < h$. Из (88) следует:

$$|V(2) - V(0)| < 4\varepsilon,$$

как только $r_{20} < h$. Это доказывает теорему 2.

Как мы видели, интегралы

$$\int_{(\xi_0)} \frac{|\cos(r_{10}N_0)|}{r_{10}^2} d\sigma_0 \quad \text{и} \quad \int_{(\xi_0)} \frac{|\cos(r_{10}N_1)|}{r_{10}^2} d\sigma_0$$

сходятся и являются ограниченными и непрерывными функциями точки m_0 на (S) . Отсюда, как и в теореме 1 этого параграфа, следует заключение:

если μ суммируема на (S) , то интегралы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dn} = & \int_{(\xi_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \\ \bar{W}(0) = & \int_{(\xi_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

сходятся, если точка m_0 на (S) не принадлежит некоторому множеству меры нуль на (S) , и являются суммируемыми функциями точки m_0 на (S) . Множество точек, для которых интегралы (89) сходятся, обозначим Q''_μ .

Лемма. Если m_0 есть точка Лебега суммируемой на (S) функции μ , то интеграл

$$\int_{(\delta, m_0)} \frac{|\mu - \mu_0|}{\rho^{2-\lambda}} d\sigma, \quad (0 < \lambda \leq 1) \quad (90)$$

сходится и стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$. Кроме того, при $\delta \rightarrow 0$ стремится к нулю интеграл

$$|z| \cdot \int_{(\delta, m_0)} \frac{|\mu - \mu_0|}{(V\rho^2 + z^2)^3} d\sigma \quad (91)$$

равномерно относительно $z \neq 0$.

Действительно, обозначим

$$\psi(\rho) = \int_{(\rho, m_0)} |\mu - \mu_0| d\sigma = \int_0^\rho \left[\rho_1 \int_0^{2\pi} |\mu - \mu_0| \frac{d\varphi}{|\cos(NN_0)|} \right] d\rho_1.$$

Так как m_0 есть точка Лебега, то $\psi(\rho) = \rho^2 \varepsilon(\rho)$, где $\varepsilon(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Кроме того, $\psi(\rho)$ абсолютно непрерывная функция ρ и

$$\psi'(\rho) = \rho \int_0^{2\pi} |\mu - \mu_0| \frac{d\varphi}{|\cos(NN_0)|}.$$

Пусть $f(\rho)$ обозначает либо $\rho^{\lambda-2}$, либо $|z|(\rho^2 + z^2)^{-3/2}$. Тогда оба исследуемых интеграла примут вид:

$$\begin{aligned} \int_{(\delta, m_0)} |\mu - \mu_0| f(\rho) d\rho &= \int_0^\delta f(\rho) \left[\rho \int_0^{2\pi} |\mu - \mu_0| \frac{d\varphi}{|\cos(NN_0)|} \right] d\rho = \\ &= \int_0^\delta f(\rho) \psi'(\rho) d\rho = \psi(\rho) f(\rho) \Big|_0^\delta - \int_0^\delta \psi(\rho) f'(\rho) d\rho = \\ &= \varepsilon(\delta) \delta^2 f(\delta) - \int_0^\delta \varepsilon(\rho) \rho^2 f'(\rho) d\rho, \end{aligned}$$

так как $\psi(\rho) f(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$ для обоих случаев $f(\rho)$.

В случае $f(\rho) = \rho^{\lambda-2}$ имеем:

$$\begin{aligned} J &< - \int_0^{\delta} \varepsilon(\rho) \rho^2 f'(\rho) d\rho = (2-\lambda) \int_0^{\delta} \varepsilon(\rho) \rho^{\lambda-1} d\rho = \\ &= (2-\lambda) \varepsilon(\rho_1) \int_0^{\delta} \rho^{\lambda-1} d\rho = \frac{(2-\lambda) \varepsilon(\rho_1)}{\lambda} \delta^{\lambda}, \quad (0 < \rho_1 < \delta), \end{aligned}$$

и для интеграла (90) лемма доказана, так как

$$\int_{(\delta, m_0)} \frac{|\mu - \mu_0|}{\rho^{2-\lambda}} d\sigma = \delta^{\lambda} \left[\varepsilon(\delta) + \frac{2-\lambda}{\lambda} \varepsilon(\rho_1) \right], \quad (0 < \rho_1 < \delta).$$

В случае $f(\rho) = |z| \cdot (\rho^2 + z^2)^{-3/2}$ имеем:

$$f'(\rho) = -3|z| \cdot \rho (\rho^2 + z^2)^{-5/2},$$

и поэтому

$$\begin{aligned} 0 &< - \int_0^{\delta} \varepsilon(\rho) \rho^2 f'(\rho) d\rho = 3|z| \int_0^{\delta} \frac{\varepsilon(\rho) \rho^3}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} d\rho < 3|z| \int_0^{\delta} \frac{\varepsilon(\rho)}{\rho^2 + z^2} d\rho = \\ &= 3\varepsilon(\rho_1) \int_0^{\delta} \frac{|z|}{\rho^2 + z^2} d\rho = 3\varepsilon(\rho_1) \operatorname{arctg} \frac{\rho}{|z|} \Big|_0^{\delta} < \frac{3\pi}{2} \varepsilon(\rho_1), \quad (0 < \rho_1 < \delta) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} |z| \int_{(\delta, m_0)} \frac{|\mu - \mu_0|}{(\sqrt{\rho^2 + z^2})^3} d\sigma &< \varepsilon(\delta) \frac{\delta^2 |z|}{(\sqrt{\delta^2 + z^2})^3} + \\ &+ \frac{3\pi}{2} \varepsilon(\rho_1) < \varepsilon(\delta) + \frac{3\pi}{2} \varepsilon(\rho_1), \end{aligned}$$

откуда следует утверждение леммы для интеграла (91).

Из сходимости интеграла (90) следует сходимость интегралов (84) и (89), если m_0 точка Лебега. Действительно, например, для первого интеграла (89) имеем:

$$\begin{aligned} \int_{(S_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 &= \int_{(S_1 - (\delta, m_0))} \mu(1) \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + \\ &+ \mu_0 \int_{(\delta, m_0)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + \int_{(\delta, m_1)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1. \end{aligned}$$

Сходимость первого и второго интегралов правой части очевидна, а сходимость третьего для точки Лебега следует из того, что в (δ, m_0) имеет место неоднократно упоминавшаяся оценка

$$\left| \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} \right| < \frac{b}{\delta^{2-\gamma}}. \quad (92)$$

Аналогично доказательство для интеграла (84) и второго интеграла (89).

Отсюда следует, что множество Q_μ точек Лебега содержится в множествах Q'_μ и Q''_μ , для которых интегралы (84) и (89) сходятся. Пусть точка m_2 лежит в (D_i) или в (D_e) на нормали N_0 в точке m_0 поверхности (S) .

Теорема 3. Если m_0 принадлежит Q_μ , то

$$\frac{dV_i}{dn} = \lim_{m_2 \rightarrow m_0} \frac{dV(2)}{dn} = 2\pi\mu_0 + \frac{dV}{dn}, \quad \text{если } m_2 \text{ в } (D_i),$$

$$\frac{dV_e}{dn} = \lim_{m_2 \rightarrow m} \frac{dV(2)}{dn} = -2\pi\mu_0 + \frac{dV}{dn}, \quad \text{если } m_2 \text{ в } (D_e),$$

где $\frac{dV}{dn}$ определен первой формулой (89). Эти пределы являются функциями, суммируемыми на (S) .

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{dV(2)}{dn} &= \int_{(S_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{12}N_0)}{r_{12}^2} d\sigma_1 = \int_{(S_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + \\ &+ \mu_0 \left[\int_{(S_1)} \frac{\cos(r_{12}N_0)}{r_{12}^2} d\sigma_1 - \int_{(S_1)} \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \right] + \\ &+ \int_{(S_1)} (\mu(1) - \mu_0) \frac{\cos(r_{12}N_0)}{r_{12}^2} d\sigma_1 - \int_{(S_1)} (\mu(1) - \mu_0) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1. \quad (93) \end{aligned}$$

Разность в квадратной скобке правой части (93) является разностью между значением в m_2 производной по направлению нормали N_0 потенциала простого слоя с плотностью $\mu = 1$ и прямым значением этой производной в точке m_0 . Отсюда следует, что эта разность стремится к 2π , если m_2 в (D_i) , и к -2π , если m_2 в (D_e) . Кроме того, первое слагаемое

правой части (93) есть $\frac{dV}{dn}$. Для доказательства теоремы осталось доказать, что разность последних двух интегралов правой части (93) стремится к нулю. Эту разность перепишем в виде:

$$\int_{(\delta, m_0)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{12} N_0)}{r_{12}^2} d\sigma_1 - \int_{(\delta, m_0)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + \\ + \int_{(S_1 - (\delta, m_0))} (\mu - \mu_0) \left[\frac{\cos(r_{12} N_0)}{r_{12}^2} - \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} \right] d\sigma_1. \quad (94)$$

Пусть ξ, η, ζ местные координаты с началом в m_0 . Координаты точки m_1 будем обозначать (ξ, η, ζ) ; точка m_2 , как лежащая на оси ζ , имеет координаты $(0, 0, z)$.

Так как точка $m_3(\xi, \eta, 0)$ удалена от точки m_1 на расстояние $|\zeta|$, то очевидно имеем из треугольника $m_1 m_2 m_3$:

$$|r_{21} - \sqrt{\rho^2 + z^2}| \leq |\zeta| \leq b\rho^{1+\lambda},$$

откуда заключаем, так как $\rho < r_{21}$,

$$\left| 1 - \frac{\sqrt{\rho^2 + z^2}}{r_{21}} \right| \leq \frac{b\rho^{1+\lambda}}{r_{21}} \leq b\rho^\lambda$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{r_{21}} \leq \frac{1 + b\delta^\lambda}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} < \frac{1 + b\delta^\lambda}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}.$$

Далее имеем:

$$|\cos(r_{12} N_0)| = \frac{|z - \zeta|}{r_{12}} \leq \frac{|z|(1 + b\delta^\lambda)}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \frac{b\rho^{1+\lambda}}{\rho}.$$

Из последних двух неравенств заключаем:

$$\frac{|\cos(r_{12} N_0)|}{r_{12}^2} < \frac{|z|}{(\sqrt{\rho^2 + z^2})^3} (1 + b\delta^\lambda)^3 + \frac{b}{\rho^{2-\lambda}}.$$

Поэтому на основании леммы следует, что первый интеграл в (94) стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$; аналогично, в силу неравенства (92), второй интеграл (94) стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$. Отсюда следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое $\delta > 0$, что модуль разности первых

двух интегралов (94) не превзойдет ε . При фиксированном δ третий интеграл (94) стремится к нулю при $m_2 \rightarrow m_0$ и можно указать такое $h > 0$, что для $r_{02} < h$ модуль третьего интеграла не превзойдет ε . Таким образом, модуль (94) не превосходит 2ε , если $r_{02} < h$; отсюда разность последних двух интегралов правой части (93) стремится к нулю при $m_2 \rightarrow m_0$. Так как μ и $\frac{dV}{dn}$ являются суммируемыми функциями на (S) , то суммируемыми будут $\frac{dV_i}{dn}$ и $\frac{dV_e}{dn}$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь потенциал двойного слоя, плотность μ которого есть функция, суммируемая на (S) :

$$W(0) = \int_{(S)} \mu(1) \frac{\cos(r_{11}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1. \quad (95)$$

Если точка m_0 вне (S) , то $W(0)$ непрерывна, имеет непрерывные производные всех порядков и удовлетворяет уравнению Лапласа. Кроме того, мы видели, что если m_0 принадлежит множеству Q''_μ на (S) , то интеграл (95) сходится. Пусть точка m_2 лежит в (D_i) или в (D_e) на нормали N_0 .

Теорема 4. Если m_0 принадлежит Q_μ , то

$$W_i = \lim_{m_2 \rightarrow m_0} W(2) = 2\pi\mu_0 + \bar{W}(0), \quad \text{если } m_2 \text{ в } (D_i),$$

$$W_e = \lim_{m_2 \rightarrow m_0} W(2) = -2\pi\mu_0 + \bar{W}(0), \quad \text{если } m_2 \text{ в } (D_e),$$

где $\bar{W}(0)$ определена второй формулой (89). Функции $W_i(0)$ и $W_e(0)$ суммируемы на (S) .

Действительно, вместо равенства (93) сейчас будем иметь:

$$W(2) = \bar{W}(0) \pm 2\pi\mu_0 + \int_{(S_1)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{12}N_1)}{r_{12}^2} d\sigma_1 - \int_{(\xi_1)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1, \quad (96)$$

и для доказательства теоремы достаточно показать, что разность последних интегралов стремится к нулю при $m_2 \rightarrow m_0$. Для этого заметим, что в (δ, m_0) имеем:

$$|\cos(r_{12}N_1) - \cos(r_{12}N_0)| < (N_1N_0) < Er_{10}^\lambda,$$

$$|\cos(r_{10}N_1) - \cos(r_{10}N_0)| < (N_1N_0) < Er_{10}^\lambda,$$

и поэтому

$$\left| \int_{(\delta, m_0)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{1k} N_1)}{r_{1k}^2} d\sigma_1 \right| \leq \\ \leq \left| \int_{(\delta, m_0)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(r_{1k} N_0)}{r_{1k}^2} d\sigma_1 \right| + E \int_{(\delta, m_0)} \frac{|\mu - \mu_0|}{\rho^{2-\lambda}} d\sigma_1. \\ (k = 0, 2)$$

При $\delta \rightarrow 0$ правая часть последнего неравенства, как мы видели, стремится к нулю и, следовательно, стремится к нулю левая. Как и в теореме 3, отсюда следует стремление к нулю при $m_2 \rightarrow m_0$ разности последних двух интегралов в правой части (96). Так как μ и \bar{W} являются функциями, суммируемыми на (S) , то W_i и W_e суммируемы на (S) . Теорема доказана.*

§ 24. Ньютонov потенциал с суммируемой плотностью

Пусть $\mu(x, y, z) = \mu(m)$ суммируемая функция в конечной области (D) . Рассмотрим ньютонов потенциал с плотностью μ

$$P(0) = \int_{(D)} \frac{\mu(1)}{r_{10}} d\tau_1. \quad (97)$$

Если точка m_0 является внутренней точкой области, дополнительной к (D) , то интеграл (97) сходится и является гармонической функцией во всякой области, лежащей вместе с границей в области, дополнительной к (D) .

Если точка m_0 является точкой области (D) или ее границы, то интеграл (97) может оказаться расходящимся. Покажем, что он сходится, если точка m_0 не принадлежит некоторому множеству меры нуль в (D) . Действительно, положив $F(0, 1) = \frac{\mu(1)}{r_{10}}$, рассмотрим интеграл

$$\varphi(1) = \int_{(D)} |F(0, 1)| d\tau_0 = \int_{(D)} \left| \frac{\mu(1)}{r_{10}} \right| d\tau_0 = |\mu(1)| \int_{(D)} \frac{d\tau}{r_{10}}.$$

* Изложенные в этом параграфе теоремы содержатся в статье Фишера (G. Fichera) „Teoremi di compattezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni“ (Annali di matematica pura ed applicata, t. XXVII, serie 4, 1948).

Так как интеграл

$$\int_{(D)} \frac{d\tau_0}{r_{10}}$$

является непрерывной и ограниченной функцией точки m_1 в (D) , то $\varphi(1)$, как произведение этой функции на суммируемую функцию $|\mu(1)|$, является суммируемой в (D) . На основании теоремы Фубини заключаем, что интеграл (97) сходится, если точка m_0 не принадлежит некоторому множеству меры нуль. Кроме того, $P(0)$ суммируема в (D) .

Мы сейчас предположим, что μ и μ^2 суммируемы, т. е. предположим, что μ принадлежит L_2 , и через $\|\mu\|$ обозначим норму μ в L_2 :

$$\|\mu\| = \left\{ \int_{(D)} |\mu|^2 d\tau \right\}^{1/2}.$$

Теорема. Если μ принадлежит L_2 , то $P[\mu]$ правильно непрерывен во всем пространстве, причем

$$|P(1) - P(2)| \leq C \|\mu\| \delta^{1/2}, \quad (98)$$

где $r_{12} = \delta$, и $C = 4\sqrt{2\pi} + 2\sqrt{3\pi}$.

Полагая μ равной нулю вне области (D) , будем считать, что в интеграле (97) областью интегрирования является все пространство. Тогда

$$\begin{aligned} P(1) - P(2) &= \int \frac{\mu(0)}{r_{10}} d\tau_0 - \int \frac{\mu(0)}{r_{20}} d\tau_0 = \\ &= \int_{r_{10} < 2\delta} \frac{\mu(0)}{r_{10}} d\tau_0 - \int_{r_{10} < 2\delta} \frac{\mu(0)}{r_{20}} d\tau_0 - \int_{r_{10} \geq 2\delta} \mu(0) \left[\frac{1}{r_{10}} - \frac{r}{r_{20}} \right] d\tau_0. \end{aligned} \quad (99)$$

На основании неравенства Буяковского — Шварца имеем:

$$\begin{aligned} \left| \int_{r_{10} < 2\delta} \frac{\mu(0)}{r_{10}} d\tau_0 \right|^2 &\leq \int_{r_{10} < 2\delta} \frac{d\tau_0}{r_{10}^2} \cdot \int_{r_{10} < 2\delta} |\mu(0)|^2 d\tau_0 \leq \\ &\leq 4\pi \cdot 2\delta \|\mu\|^2 = 8\pi \|\mu\|^2 \delta; \end{aligned}$$

отсюда следует

$$\left| \int_{r_{10} < 2\delta} \frac{\mu(0)}{r_{10}} d\tau_0 \right| \leq \sqrt{8\pi} \|\mu\| \delta^{1/2}. \quad (100)$$

Замечая, что шар $r_{10} < 2\delta$ содержится в шаре $r_{20} < 3\delta$, найдем таким же путем, что модуль второго интеграла правой части (99) не превосходит $\sqrt{12\pi} \|\mu\| \delta^{1/2}$. Эту оценку назовем (100').

Так как вне шара $r_{10} < 2\delta$, в силу неравенства (9) § 2, имеем $r_{20} \geq \frac{r_{10}}{2}$, то

$$\left| \frac{1}{r_{10}} - \frac{1}{r_{20}} \right| = \frac{|r_{20} - r_{10}|}{r_{10}r_{20}} \leq \frac{2\delta}{r_{10}^2};$$

применяя неравенство Буняковского — Шварца, находим:

$$\begin{aligned} \left| \int_{r_{10} \geq 2\delta} \mu(0) \left[\frac{1}{r_{10}} - \frac{1}{r_{20}} \right] d\tau_0 \right| &\leq \sqrt{\int_{r_{10} \geq 2\delta} |\mu|^2 d\tau} \sqrt{\int_{r_{10} \geq 2\delta} \frac{4\delta^2}{r_{10}^4} d\tau_0} \leq \\ &\leq 2\delta \cdot \|\mu\| \sqrt{4\pi \int_{2\delta}^{\infty} \frac{r^2 dr}{r^4}} = 2\delta \cdot \|\mu\| \sqrt{\frac{4\pi}{2\delta}} = 2\sqrt{2\pi} \cdot \|\mu\| \delta^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (99), (100), (100') находим (98). Теорема доказана. Эта теорема будет впоследствии нами использована.

В заключение этого параграфа изложим ряд интересных свойств ньютонова потенциала с суммируемой плотностью.

Введем сейчас принадлежащее акад. С. Л. Соболеву определение обобщенной производной.

Пусть в ограниченной или неограниченной области (D) определена суммируемая функция $f(x, y, z)$. Через $\{\varphi\}_l$ обозначим класс функций, непрерывных и имеющих непрерывные производные до порядка l во всем пространстве, и таких, что каждая функция φ класса $\{\varphi\}_l$ обращается в нуль вне некоторой ограниченной области (D_φ) , зависящей от выбора φ и содержащейся вместе с границей в (D) .

Пусть $\omega(x, y, z)$ функция, суммируемая в (D) и такая, что имеет место равенство

$$\int_{(D)} f \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2} \partial z^{l_3}} d\tau = (-1)^l \int_{(D)} \omega \varphi d\tau$$

для всякой функции φ класса $\{\varphi\}_l$. Говорят, что $\omega(x, y, z)$ есть обобщенная производная порядка l от функции f и

записывают:

$$\omega = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2} \partial z^{l_3}}.$$

Покажем, что ньютонов потенциал с плотностью, суммируемой во всем пространстве, имеет обобщенные производные первого порядка в любой ограниченной области.

Пусть (x, y, z) означают координаты точки m_0 , и (ξ, η, ζ) — координаты точки m_1 . Пусть (D) ограниченная область. Тогда интеграл

$$\int_{(D)} \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{10}} \right| d\tau_0$$

есть ограниченная и непрерывная функция точки m_1 во всем пространстве и поэтому произведение $|\mu(1)|$ на этот интеграл есть суммируемая функция точки m_1 . Отсюда на основании теоремы Фубини заключаем, что интеграл

$$\omega(0) = \int \mu(1) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{10}} d\tau_1$$

сходится, если точка m_0 не принадлежит некоторому множеству меры нуль. Кроме того, следует, что $\omega(0)$ суммируема по произвольной ограниченной области (D) . Покажем, что $\omega(0)$ является обобщенной производной от ньютонова потенциала

$$P(0) = \int \mu(1) \frac{1}{r_{10}} d\tau_1.$$

Действительно, пусть $\varphi(x, y, z)$ некоторая функция класса $\{\varphi\}_1$. Тогда, учитывая, что последующие перестановки порядка интегрирования следуют из теоремы Фубини, получим:

$$\begin{aligned} \int_{(D_\varphi)} P(0) \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau_0 &= \int_{(D_\varphi)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left[\int \frac{\mu(1)}{r_{10}} d\tau_1 \right] d\tau_0 = \\ &= \int \mu(1) \left[\int_{(D_\varphi)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{1}{r_{10}} d\tau_0 \right] d\tau_1 = \int \mu(1) \left[- \int_{(D_\varphi)} \varphi(0) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{10}} d\tau_0 \right] = \\ &= - \int_{(D_\varphi)} \varphi(0) \left[\int \mu(1) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{10}} d\tau_1 \right] d\tau_0 = - \int_{(D_\varphi)} \omega(0) \varphi(0) d\tau_0, \end{aligned}$$

т. е.

$$\int_{(\vec{D}_{\varphi})} P(0) \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau_0 = - \int_{(\vec{D}_{\varphi})} \omega(0) \varphi(0) d\tau_0.$$

Последнее, ввиду произвольности функции $\varphi(x, y, z)$ класса $\{\varphi\}_1$ означает, что $\omega(0)$ есть обобщенная производная от $P(0)$, т. е.

$$\omega(0) = \frac{\partial P}{\partial x},$$

что и требовалось доказать.

Если μ суммируема вместе с μ^2 , то относительно $P(0)$ можно высказать более сильные утверждения. Именно, мы видели, что $P(0)$ тогда правильно непрерывна. Кроме того, имеют место следующие утверждения, которые приведем без доказательства:

- 1) $\frac{\partial P}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ суммируемы с квадратом по каждой ограниченной области;
- 2) существуют обобщенные производные второго порядка, которые суммируемы с квадратом во всем пространстве. Эти производные второго порядка равны:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\frac{4\pi}{3} \mu_0 + \int \mu(1) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{10}}}{\partial x^2} d\tau_1,$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = \int \mu(1) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{10}}}{\partial x \partial y} d\tau_1,$$

где интегралы в обычном смысле расходятся и понимаются как пределы в L_2 при $\varepsilon \rightarrow 0$ функций

$$\int_{r_{10} \geq \varepsilon} \mu(1) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{10}}}{\partial x^2} d\tau_1 \quad \text{и} \quad \int_{r_{10} \geq \varepsilon} \mu(1) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{10}}}{\partial x \partial y} d\tau_1.$$

Последние интегралы при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ являются непрерывными функциями точки m_0 .

Из формул для вторых производных следует, что

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = -4\pi\mu(0),$$

т. е. ньютонов потенциал, плотность которого суммируема вместе с квадратом, удовлетворяет уравнению Пуассона, в котором производные понимаются в обобщенном смысле. *

* Доказательство последних утверждений можно найти в книге С. Г. Михлина „Проблема минимума квадратичного функционала“.

ГЛАВА III

ЗАДАЧИ НЕЙМАНА И РОБЭНА

§ 1. Постановка задачи Неймана

В отношении вида областей, ограниченных поверхностями (S) , мы будем различать следующие случаи:

1°. Случай, который мы назовем обыкновенным. В этом случае, существует одна поверхность, ограничивающая сплошное тело (рис. 22). Из двух областей, разграниченных (S) , мы обозначим через (D_e) внешнюю область, содержащую бесконечно удаленную точку, и через (D_i) — внутреннюю область. Нормаль N к поверхности (S) всегда будет направлена в область (D_e) .

2°. Случай (J), в котором, как показано на рис. 23, существует несколько внутренних границ.

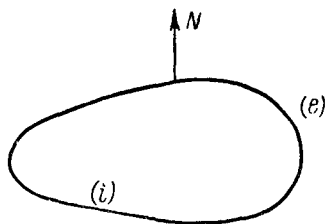


Рис. 22.

Мы обозначим здесь через (D_i) сплошную область, ограниченную всеми поверхностями и не содержащую бесконечно удаленной точки; через (D_e) — область, заключающую в себе все остальное пространство. Нормаль к пограничной поверхности мы всегда будем считать направленной в (D_e) . (S) будет обозначать совокупность всех границ: через (S^0) мы обозначим внешнюю границу, через $(S^{(1)})$, $(S^{(2)})$, ..., $(S^{(k)})$ — внутренние границы.

3°. Случай (E), когда имеется несколько сплошных тел; здесь мы обозначим через (D_e) единую область, определяемую всеми границами и содержащую бесконечно удаленную

точку (рис. 24), через (D_i) — область, содержащую все остальное пространство.

Нормаль N всегда считается направленной в (D_e) ; S означает совокупность границ; $(S^{(1)})$, $(S^{(2)})$, ..., $(S^{(k)})$ — границы отдельных тел. Мы будем всегда считать, что все границы удовлетворяют условиям Ляпунова.

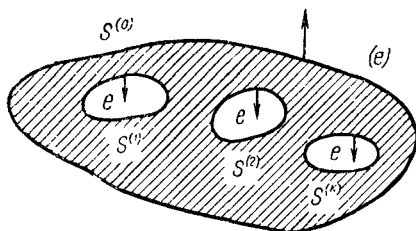


Рис. 23.

Задача А. Найти функцию V , гармоническую внутри области (D_i) и удовлетворяющую условию

$$\frac{dV_i}{dn} = f \quad \text{в любой точке } (S), \quad (1)$$

где f — заданная функция, непрерывная на (S) .

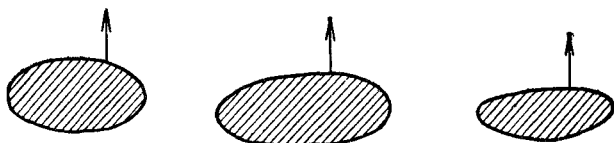


Рис. 24.

Так формулируется внутренняя задача Неймана.

Найти функцию V , гармоническую внутри (D_e) и удовлетворяющую условию

$$\frac{dV_e}{dn} = f \quad \text{в любой точке } (S). \quad (2)$$

Такова внешняя задача Неймана.

Легко убедиться, что в некоторых случаях при $f=0$ существуют отличные от нуля решения задачи Неймана. Дей-

гвительно, в случаях обычном и (J) функция U , равная какой-либо постоянной в (D_i) , является гармонической в (D_i) удовлетворяет на границе условию:

$$\frac{dU_i}{dn} = 0. \quad (1')$$

В случае (E) этому же условию удовлетворяет функция U , принимающая внутри каждой из поверхностей $(S^{(1)}), \dots, (S^{(k)})$ произвольные постоянные значения.

В случае (J) функция U , принимающая произвольные постоянные значения внутри каждой из поверхностей $(S^{(1)}), \dots, (S^{(k)})$ и равная нулю вне $(S^{(0)})$, является гармонической в (D_e) и удовлетворяет на границе условию:

$$\frac{dU_e}{dn} = 0. \quad (2')$$

Если функция V гармоническая внутри (D_e) [или (D_e) в случае (J)] является решением задачи Неймана, то, очевидно, что и $V + U$ является решением той же задачи Неймана.

Можно показать, что этим и ограничивается неопределенность в решении задачи Неймана. Для этого достаточно показать:

1°. Функция, гармоническая внутри конечной связной области, равна постоянной, если на границе области ее нормальная производная равна нулю;

2°. Функция, гармоническая внутри бесконечной связной области с конечной границей, равна нулю, если ее нормальная производная равна нулю.

Чтобы не прерывать изложения, мы отнесем не очень простое доказательство этих утверждений в конец главы.

З а м е ч а н и е. Для случая (J) решение внешней задачи может быть заменено решением k внутренних задач и одной внешней. Точно так же, в случае (E), решение внутренней задачи может быть заменено решением k внутренних задач.

§ 2. Замена задачи А другой задачей

Вместо задачи А мы станем решать следующую задачу:

Задача В. Найти потенциал простого слоя, распространенного по (S) , удовлетворяющий условию (1) для внутренней задачи и условию (2) — для внешней задачи.

Пусть

$$V = \int_{(S)} \frac{\mu d\sigma_1}{r_{10}} \quad (3)$$

— потенциал простого слоя, распространенного по (S) .

В случае (J), этот интеграл представляет собой сумму:

$$\int_{(S_1^0)} \frac{\mu d\sigma_1}{r_{10}} + \sum_{l=1}^{l=k} \int_{(S_1^l)} \frac{\mu d\sigma_1}{r_{10}},$$

в случае же E — сумму:

$$\sum_{l=1}^{l=k} \int_{(S_1^{(l)})} \frac{\mu d\sigma_1}{r_{10}}.$$

З а м е ч а н и е. Будем обозначать через $m_0(x, y, z)$ точку, для которой мы желаем вычислить V , через $m_1(x_1, y_1, z_1)$ — точку интегрирования, через r_{10} — расстояние между m_0 и m_1 . Вместо (S) мы будем писать (S_1) , для того чтобы отметить, что (S) геометрическое место точек m_1 .

Как мы видели, потенциал простого слоя с непрерывной плотностью является функцией гармонической внутри (D_i) и внутри (D_e) . Всякое решение задачи В является, таким образом, решением задачи А, и не существует других решений задачи А, кроме отличающихся на функцию U , о которой было сказано в предыдущем параграфе. Как будет видно из последующего, всякое решение задачи А может быть представлено потенциалом простого слоя и, таким образом, является решением задачи В. Следовательно, задачи А и В равносильны.

Мы заменим задачу В некоторой задачей С, решение которой приведет к полному решению задачи В.

Задача С. Нйти потенциал простого слоя W , удовлетворяющий уравнению

$$\frac{dW_i}{dn} - \frac{dW_e}{dn} = -2\zeta \frac{dW}{dn} - 2f \quad \text{на } (S). \quad (B)$$

Функция W , удовлетворяющая уравнению (B), зависит от ζ , и нетрудно видеть, что при $\zeta = 1$, W превращается в функцию, разрешающую задачу (B_i) , а при $\zeta = -1$ — в функцию — решение задачи (B_e) .

В самом деле, напомним формулы § 4 (II)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW_i}{dn} - \frac{dW_e}{dn} &= 4\pi \times \text{плотность } W; \\ \frac{dW_i}{dn} + \frac{dW_e}{dn} &= 2 \frac{dW}{dn}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Применяя их, находим при $\zeta = 1$:

$$\frac{dW_i}{dn} - \frac{dW_e}{dn} = -\frac{dW_i}{dn} - \frac{dW_e}{dn} = 2f, \quad \frac{dW_i}{dn} = -f;$$

таким образом, функция W есть решение внутренней задачи В.

Полагая $\zeta = -1$, имеем:

$$\frac{dW_i}{dn} - \frac{dW_e}{dn} = \frac{dW_i}{dn} + \frac{dW_e}{dn} = 2f, \quad \frac{dW_e}{dn} = f;$$

это доказывает, что в данном случае функция W есть решение внешней задачи В.

Обозначим через $-\frac{1}{2\pi}\mu$ плотность потенциала W , т. е. положим:

$$W = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \frac{\mu d\sigma_1}{r_{10}}. \quad (5)$$

Первое уравнение (4) принимает вид:

$$\frac{dW_i}{dn} - \frac{dW_e}{dn} = 4\pi \left(-\frac{1}{2\pi} \mu \right) = -2\mu.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{dW}{dn} = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \mu \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1, \quad (6)$$

находим из уравнения (В)

$$-2\mu = \frac{2\zeta}{2\pi} \int_{(S_1)} \mu \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 - 2f,$$

$$\mu = -\frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S_1)} \mu \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + f.$$

Мы получили для μ интегральное уравнение, которое будем писать в виде:

$$\mu(0) = -\frac{\zeta}{2\pi} \int_{(\dot{S}_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + f(0), \quad (7)$$

обозначая через $F(0)$ функцию m_0 , а через $F(1)$ — функцию m_1 .

Ядро уравнения (7) равняется:

$$K(1, 0) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}.$$

Оно не ограничено. Уравнение, сопряженное с (7), напишется:

$$\begin{aligned} \vartheta(0) &= \zeta \int_{(\dot{S}_1)} K(0, 1) \vartheta(1) d\sigma_1 + f(0) = \\ &= -\frac{\zeta}{2\pi} \int_{(\dot{S}_1)} \vartheta(1) \frac{\cos(r_{01}N_1)}{r_{01}^2} d\sigma_1 + f(0). \end{aligned}$$

Отметим, что вектор r_{10} , в соответствии с нашими соглашениями, всегда направлен от m_0 к m_1 . Таким образом, последнее уравнение может быть переписано в следующей форме:

$$\vartheta(0) = \frac{\zeta}{2\pi} \int_{(\dot{S}_1)} \vartheta(1) \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + f(0). \quad (8)$$

Здесь первый член второй части — потенциал двойного слоя.

З а м е ч а н и е. Уравнение (8) играет ту же роль в задаче Дирихле, что уравнение (7) в задаче Неймана.

§ 3. Формальное решение уравнения (B)

Предположим, что возможно удовлетворить уравнению (7)

$$\mu(0) = -\frac{\zeta}{2\pi} \int_{(\dot{S}_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + f(0)$$

Вычисляя нормальные производные потенциалов (12), находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV_1}{dn} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(\dot{s}_1)} \rho_0(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1, \\ \frac{dV_2}{dn} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(\dot{s}_1)} \rho_1(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1, \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{dV_k}{dn} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(\dot{s}_1)} \rho_{k-1}(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Сопоставление равенств (13) и (10) дает:

$$\frac{dV_1}{dn} = \rho_1(0), \quad \frac{dV_2}{dn} = \rho_2(0), \dots, \quad \frac{dV_k}{dn} = \rho_k(0), \dots$$

Заменяя в (12) $\rho_0(0)$, $\rho_1(0)$, ... полученными значениями, находим:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(\dot{s}_1)} f(1) \frac{d\sigma_1}{r_{10}}, \\ V_2 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(\dot{s}_1)} \frac{dV_1}{dn} \frac{d\sigma_1}{r_{10}}, \\ &\dots\dots\dots, \\ V_k &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(\dot{s}_1)} \frac{dV_{k-1}}{dn} \frac{d\sigma_1}{r_{10}}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (12')$$

Равенства (12') позволяют последовательно вычислять потенциалы (12), не пользуясь функциями (10).

Мы назовем потенциалы (12') потенциалами Стеклова — Робэна.

Равенство (11) дает нам формальное решение уравнения (B). Если ряд (11) сходится при $\zeta=1$ или при $\zeta=-1$, то W представляет действительное решение задачи B. Итак, задача сводится к изучению сходимости ряда (11) при $\zeta=1$ и при $\zeta=-1$. Это исследование мы и проведем в следующих параграфах.

§ 4. Исследование итерированных ядер

Мы условились обозначать через (S_1) границу (S) и через $d\sigma_1$ элемент ее поверхности, когда координаты переменной точки обозначены через x_1, y_1, z_1 ; аналогично этому, мы станем обозначать ту же поверхность через $(S_2), (S_3), \dots$, когда координаты переменной точки обозначены через $x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3, \dots$; элементы поверхности, в соответствующих случаях, будут нами обозначаться через $d\sigma_2, d\sigma_3, \dots$, а функция точки (x_n, y_n, z_n) — через $f(n)$.

Рассмотрим итерированные ядра для ядра $K(1, 0) = K_1(1, 0)$:

$$K_n(1, 0) = \int_{(S_2)} K(1, 2) K_{n-1}(2, 0) d\sigma_2.$$

Изучим ближе ядро

$$K_2(1, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{(S_2)} \frac{\cos(r_{12}N_2)}{r_{12}^2} \cdot \frac{\cos(r_{20}N_0)}{r_{20}^2} d\sigma_2.$$

Это ядро как функция точки m_1 является потенциалом двойного слоя с плотностью $-\frac{\cos(r_{20}N_0)}{4\pi^2 r_{20}^2}$, которая интегрируема

и непрерывна всюду, за исключением точки m_0 , в окрестности которой она, может быть, не ограничена. Отсюда, в силу замечания к § 3(II) следует, что $K_2(1, 0)$ непрерывна как функция точки m_1 , если m_1 не совпадает с m_0 , в окрестности которой $K_2(1, 0)$, возможно, не ограничена. Аналогично, рассматривая $K_2(1, 0)$ как нормальную производную потенциала простого слоя, заключаем о непрерывности $K_2(1, 0)$ как функции точки m_0 , если m_0 не совпадает с m_1 . Те же заключения делаем о последующих итерированных ядрах. Покажем, что одно из итерированных ядер ограничено; тогда следующее за ним ядро будет наверно непрерывным. В последующих рассуждениях будем лишь отмечать ограниченность функций, не отмечая их непрерывности.

Предположим, что (S) — поверхность Ляпунова, для которой

$$(N_1 N_0) < E r_{10}^\lambda.$$

Докажем, что, в этом случае, при n , удовлетворяющем неравенствам

$$2 - (n - 1)\lambda \geq 0, \quad 2 - n\lambda < 0,$$

итерированное ядро n -го порядка, соответствующее ядру

$$K(1, 0) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2},$$

— ядро ограниченное.

Напомним, что в § 1(I) мы получили неравенство:

$$|\cos(r_{10}N_0)| < ar_{10}^\lambda.$$

При помощи этого неравенства находим:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} \right| r_{10}^{2-\lambda} < \frac{a}{2\pi} = B.$$

Отсюда вытекает, что, если мы положим:

$$K(1, 0) = \frac{C(1, 0)}{r_{10}^{2-\lambda}},$$

то функция $C(1, 0)$ будет функцией непрерывной и ограниченной.

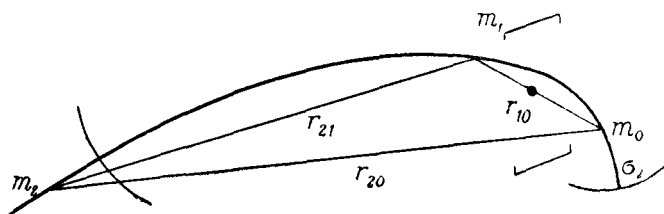


Рис. 25.

Оценим теперь второе итерированное ядро. Имеем:

$$K_2(1, 0) = \int_{(\bar{S}_2)} K(1, 2) K(2, 0) d\bar{S}_2 = \int_{(\bar{S}_2)} \frac{C(1, 2) C(2, 0)}{r_{12}^{2-\lambda} r_{20}^{2-\lambda}} d\bar{S}_2.$$

Опишем вокруг точки m_0 как центра сферу Ляпунова и сферу радиуса $2r_{10}$ (рис. 25).

Пусть (Σ_2) и (σ_2) — части (S) , вырезаемые этими сферами. Имеем:

$$K_2(1, 0) = \int_{(S_1 - \Sigma_2)} \frac{C(1, 2) C(2, 0)}{r_{12}^{2-\lambda} r_{20}^{2-\lambda}} d\sigma_2 + \\ + \int_{(\Sigma_1 - \sigma_2)} \frac{C(1, 2) C(2, 0)}{r_{12}^{2-\lambda} r_{20}^{2-\lambda}} d\sigma_2 + \int_{(\sigma_2)} \frac{C(1, 2) C(2, 0)}{r_{12}^{2-\lambda} r_{20}^{2-\lambda}} d\sigma_2. \quad (14)$$

Первый из этих трех интегралов ограничен, так как r_{12} и r_{10} в области интегрирования превосходят $\frac{d}{2}$, если r_{10} меньше $\frac{d}{2}$.

Рассмотрим второй интеграл. Точка m_2 находится вне сферы радиуса $2r_{10}$, вследствие чего

$$r_{21} > \frac{1}{2} r_{20}.$$

Вводя цилиндрические координаты с полюсом m_0 и с полярной плоскостью, касательной к поверхности в m_0 , имеем:

$$\left| \int_{(\Sigma_2 - \sigma_2)} \frac{C(1, 2) C(2, 0)}{r_{12}^{2-\lambda} r_{20}^{2-\lambda}} d\sigma_2 \right| < B^2 2^{2-\lambda} \int_{(\Sigma_2 - \sigma_2)} \frac{d\sigma_2}{r_{20}^{4-2\lambda}} < \\ < B^2 4\pi \cdot 2^{2-\lambda} \int_{r_{10}}^d \frac{\rho d\rho}{\rho^{4-2\lambda}} = \frac{B^2 2^{2-2\lambda} 4\pi}{2-2\lambda} \left\{ \frac{1}{r_{10}^{2-2\lambda}} - \frac{1}{d^{2-2\lambda}} \right\};$$

мы видим, что произведение второго интеграла на $r_{10}^{2-2\lambda}$ есть функция ограниченная.

Переходим к последнему из интегралов (14). Проведем в середине r_{10} перпендикулярную плоскость. Эта плоскость делит (σ_2) на две части: часть (σ_0) , содержащую точку m_0 , и часть (σ_1) , содержащую точку m_1 .

Последний из интегралов (14) есть сумма двух интегралов, соответственно распространенных по (σ_0) и (σ_1) . Рассмотрим первый из них. При интегрировании по (σ_0) , r_{12}

больше $\frac{1}{2} r_{10}$. Отсюда следует, что

$$\left| \int_{(\sigma_0)} \frac{C(1, 2) C(2, 0)}{r_{12}^{2-\lambda} r_{20}^{2-\lambda}} d\sigma_2 \right| < \frac{B^2 2^{2-\lambda}}{r_{10}^{2-\lambda}} \int_{(\sigma_0)} \frac{d\sigma_2}{r_{20}^{2-\lambda}} < \\ < \frac{B^2 2^{2-\lambda} 2^2 \pi}{r_{10}^{2-\lambda}} \int_0^{2r_{10}} \frac{\rho d\rho}{\rho^{2-\lambda}} = \frac{B^2 2^{2-\lambda} 4\pi}{r_{10}^{2-\lambda} \lambda} (2r_{10})^\lambda.$$

Произведение этого интеграла на $r_{10}^{2-2\lambda}$ также ограничено.

Точно так же, обозначая через (σ'_2) часть (S) , вырезанную сферой с центром m_1 и радиусом $3r_{10}$ и заключающую внутри себя (σ_2) , и замечая, что при интегрировании по (σ_1) r_{20} больше $\frac{1}{2} r_{10}$, получаем:

$$\left| \int_{(\sigma_1)} \frac{C(1, 2) C(2, 0)}{r_{12}^{2-\lambda} r_{20}^{2-\lambda}} d\sigma_2 \right| < \frac{B^2 2^{2-\lambda}}{r_{10}^{2-\lambda}} \int_{(\sigma_1)} \frac{d\sigma_2}{r_{12}^{2-\lambda}} < \\ < \frac{B^2 2^{2-\lambda}}{r_1^{2-\lambda}} \int_{(\sigma'_2)} \frac{d\sigma_2}{r_{12}^{2-\lambda}} < \frac{B^2 2^{2-\lambda} 4\pi}{r_{10}^{2-\lambda} \lambda} (3r_{10})^\lambda.$$

Рассматривая полученные результаты, находим:

$$|K_2(1, 0) r_{10}^{2-2\lambda}| < B_1, \quad K_2(1, 0) = \frac{C_2(1, 0)}{r_{10}^{2-2\lambda}},$$

где B_1 определенное число, а $C_2(1, 0)$ — ограниченная функция.

Повторяя те же рассуждения для ядра

$$K_3(1, 0) = \int_{(S_2)} K(1, 2) K_2(2, 0) d\sigma_2,$$

получаем:

$$K_3(1, 0) = \frac{C_3(1, 0)}{r_{10}^{2-3\lambda}},$$

где $C_3(1, 0)$ — ограниченная функция.

Действуя совершенно аналогично, находим:

$$K_{n-1}(1, 0) = \frac{C_{n-1}(1, 0)}{r_{10}^{2-(n-1)\lambda}}, \quad \text{если } 2 - (n-1)\lambda \neq 0,$$

$K_{n-1}(1, 0) = C_{n-1}(1, 0) |\log r_{10}|$, если $2 - (n-1)\lambda = 0$;
 таким образом, нами доказано, что $K_n(1, 0)$ — ограниченная функция.

§ 5. Фактическое решение уравнения (В)

На основании теории интегральных уравнений мы можем утверждать, что решение уравнения (7)

$$\begin{aligned} \mu(0) &= \frac{-\zeta}{2\pi} \int_{(\delta_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + f(0) = \\ &= \zeta \int_{(\delta_1)} K(1, 0) \mu(1) d\sigma_1 + f(0) \end{aligned}$$

одновременно удовлетворяет и уравнению

$$\mu(0) = \zeta^n \int_{(\delta_1)} K_n(1, 0) \mu(1) d\sigma_1 + \sum_n(0), \quad (15)$$

в котором $\sum_n(0)$ есть сумма n первых членов разложения μ по степеням ζ :

$$\begin{aligned} \sum_n(0) &= \rho_0(0) + \zeta \rho_1(0) + \dots + \zeta^{n-1} \rho_{n-1}(0) = \\ &= f(0) + \zeta \int_{(\delta_1)} K(1, 0) f(1) d\sigma_1 + \dots + \\ &\quad + \zeta^{n-1} \int_{(\delta_1)} K_{n-1}(1, 0) f(1) d\sigma_1. \end{aligned}$$

Если ядро $K_n(1, 0)$ ограничено, то можно ввести в рассмотрение соответствующий определитель Фредгольма $\mathcal{D}(\zeta)$, его первый минор $\mathcal{D}(\zeta, 1, 0)$ и резольвенту:

$$\frac{\mathcal{D}(\zeta, 1, 0)}{\mathcal{D}(\zeta)}. \quad (16)$$

Выражения $\mathcal{D}(\zeta)$ и $\mathcal{D}(\zeta, 1, 0)$ могут быть разложены в ряды по степеням ζ , сходящиеся при любых значениях ζ . Поскольку (16) есть резольвента уравнения (15), имеем:

$$\mu(0) = \sum_n(0) + \zeta^n \int_{(\delta_1)} \sum_n(1) \frac{\mathcal{D}(\zeta, 1, 0)}{\mathcal{D}(\zeta)} d\sigma_1 = \frac{\mathcal{D}_1(\zeta, 0)}{\mathcal{D}_1(\zeta)}. \quad (17)$$

Итак, $\mu(0)$ представляется в виде дроби, числитель и знаменатель которой степенные ряды по ζ , сходящиеся при всех значениях ζ . Коэффициенты ряда для $\mathcal{D}_1(\zeta; 0)$ суть непрерывные функции точки m_0 , и этот ряд сходится равномерно на (S) при любом значении ζ . Мы обозначаем знаменатель дроби, стоящий в последнем равенстве, через $\mathcal{D}_1(\zeta)$, вместо $\mathcal{D}(\zeta)$, предполагая, что в этой дроби произведено сокращение общих множителей. Если $\zeta_1 \neq 0$ есть наименьший по модулю нуль $\mathcal{D}_1(\zeta)$, то ряд (9) сходится равномерно на (S) для всякого фиксированного значения ζ из круга $|\zeta| < |\zeta_1|$.

Потенциал

$$W(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \frac{\mathcal{D}_1(\zeta, 1)}{\mathcal{D}_1(\zeta)} \frac{d\sigma_1}{r_{10}}$$

есть решение уравнения (B). Уравнение (B) будет иметь решения, отвечающие значениям $\zeta = 1$ и $\zeta = -1$, если эти числа не являются нулями функции $\mathcal{D}_1(\zeta)$.

Таким образом, решение задачи Неймана сводится к выяснению условий, при которых числа $\zeta = 1$ и $\zeta = -1$ не являются полюсами мероморфной функции $\mu(0)$.

Для исследования этого вопроса мы, прежде всего, докажем следующие четыре теоремы.

1°. В обыкновенном случае и в случае (E), число $\zeta = -1$ не может быть полюсом функции $\mu(0)$; случай (J) для данной теоремы — исключительный случай.

Во всех случаях:

2°. Полюсы функции $\mu(0)$ — вещественные.

3°. У функции $\mu(0)$ не существует полюсов между -1 и $+1$.

4°. Все полюсы функции $\mu(0)$ — простые.

§ 6. Вспомогательная теорема

Для доказательства только что упомянутых теорем мы должны воспользоваться тождествами Грина:

$$\begin{aligned} \int_{D_i} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\tau &= \int_{(S)} U \frac{dV_i}{dn} d\sigma = \\ &= \int_{(S)} V \frac{dU_i}{dn} d\sigma, \quad (18) \end{aligned}$$

$$\int_{(D_i)} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = \int_{(S)} V \frac{dV_i}{dn} d\sigma, \quad (19)$$

$$\int_{(S)} \left(U \frac{dV_i}{dn} - V \frac{dU_i}{dn} \right) d\sigma = 0, \quad (20)$$

где U и V — потенциалы простого слоя, а также аналогичными формулами для области (D_e) . Эти тождества установлены нами для функций, гармонических в (D_i) . Между тем, потенциал простого слоя, вообще говоря, не является функцией гармонической в (D_i) , а лишь функцией гармонической внутри (D_i) . Лишь в случае, когда плотность μ правильно непрерывна, можно на основании § 7 (II) утверждать, что первые производные потенциала правильно непрерывны в (D_i) и что тождества Грина применимы.

В этом параграфе докажем, что формула (18) имеет место для потенциалов простого слоя с непрерывной плотностью, что достаточно для дальнейшего. Формулы (19) и (20) следуют из (18).

Пусть точки m_1 и m_3 лежат в (D_e) . Тогда $\frac{1}{r_{10}}$ и $\frac{1}{r_{30}}$ являются гармоническими функциями точки m_0 в (D_i) , имеющими непрерывные производные любого порядка, и к ним применимо тождество Грина

$$\begin{aligned} \int_{(D_i)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{10}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{30}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r_{10}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r_{30}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r_{10}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r_{30}} \right) d\tau = \\ = \int_{(S)} \frac{1}{r_{10}} \frac{d}{dn} \frac{1}{r_{30}} d\sigma = - \int_{(S)} \frac{1}{r_{10}} \frac{\cos(\mathbf{r}_{03} \mathbf{r}_0)}{r_{03}^2} d\sigma. \end{aligned} \quad (21)$$

Если точка m_3 фиксирована в (D_e) , то обе части равенства (21) являются непрерывными во всем пространстве функциями точки m_1 : интеграл по (D_i) как первая производная ньютонова потенциала с непрерывной плотностью, интеграл по (S) как потенциал простого слоя с непрерывной плотностью. Поэтому формула (21) справедлива, если точка m_1 лежит на (S) . Пусть точка m_1 на (S) . На основании замечания к § 13 (II) левая часть (21) есть непрерывная

функция точки m_3 во всем пространстве, за исключением точки m_1 . Правая часть, на основании замечания к § 3 (II), при приближении точки m_3 к точке m_2 на (S) , отличной от m_1 , получает слагаемое $\frac{2\pi}{r_{12}}$.

Таким образом, имеем:

$$\int_{(D_1)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{10}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{20}} + \dots \right) d\tau = \frac{2\pi}{r_{12}} - \int_{(S)} \frac{1}{r_{10}} \frac{\cos(r_{02}n_0)}{r_{02}^2} d\sigma. \quad (22)$$

Пусть μ и ν плотности потенциалов простого слоя U и V . На основании (22) справедливо равенство:

$$\begin{aligned} \int_{(S_2)} \mu(2) \left\{ \int_{(S_1)} \nu(1) \left[\int_{(D_1)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{10}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{20}} + \dots \right) d\tau \right] d\sigma_1 \right\} d\sigma_2 = \\ = \int_{(S_2)} \mu(2) \left\{ \int_{(S_1)} \nu(1) \left[\frac{2\pi}{r_{12}} - \int_{(S)} \frac{1}{r_{10}} \frac{\cos(r_{02}n_0)}{r_{02}^2} d\sigma \right] d\sigma_1 \right\} d\sigma_2. \end{aligned} \quad (23)$$

Мы позже докажем законность перестановки порядка интегрирования. Переставляя порядок интегрирования в левой части (23), получим формулу:

$$\begin{aligned} \int_{(S_2)} \mu(2) \left\{ \int_{(S)} \nu(1) \left[\int_{(D_1)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{10}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{20}} d\tau \right] d\sigma_1 \right\} d\sigma_2 = \\ = \int_{(D_1)} \left[\int_{(S_1)} \nu(1) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{10}} d\sigma_1 \right] \left[\int_{(S_2)} \mu(2) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{20}} d\sigma_2 \right] d\tau = \int_{(D_1)} \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} d\tau \end{aligned}$$

и аналогичные ей.

Поэтому левая часть (23) примет вид:

$$\int_{(D_1)} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\tau,$$

т. е. она равна левой части (18).

Правая часть формулы (23) примет вид:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{(S_2)} \mu(2) \left(\int_{(S_1)} \nu(1) \frac{1}{r_{12}} d\sigma_1 \right) d\sigma_2 - \int_{(S)} \left[\int_{(S_1)} \nu(1) \frac{1}{r_{10}} d\sigma_1 \right] \times \\ \times \left[\int_{(S_2)} \mu(2) \frac{\cos(r_{02}n_0)}{r_{02}^2} d\sigma_2 \right] d\sigma = 2\pi \int_{(S)} \mu(0) V(0) d\sigma - \\ - \int_{(S)} V(0) \left[\int_{(S_2)} \mu(2) \frac{\cos(r_{02}n_0)}{r_{02}^2} d\sigma_2 \right] d\sigma = \int_{(S)} V(0) \left\{ 2\pi\mu(0) - \right. \\ \left. - \int_{(S_2)} \mu(2) \frac{\cos(r_{02}n_0)}{r_{02}^2} d\sigma_2 \right\} d\sigma = \int_{(S)} V(0) \frac{dU_i}{dn_0} d\sigma, \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} 2\pi\mu(0) - \int_{(S_2)} \mu(2) \frac{\cos(r_{02}n_0)}{r_{02}^2} d\sigma_2 = 2\pi\mu(0) + \int_{(S_2)} \mu(2) \frac{\cos(r_{20}n_0)}{r_{20}^2} d\sigma_2 = \\ = 2\pi\mu(0) + \frac{dU}{dn_0} = \frac{dU_i}{dn_0}. \end{aligned}$$

Таким образом, правая часть (23) равна правой части (18). Этим самым формула (18) доказана, если считать законными перестановки порядков интегрирования.

На основании добавления к § 6 (I) для возможности перестановки порядка интегрирования в левой части (23) достаточно доказать существование интеграла

$$\int_{(S_2)} |\mu(2)| \left\{ \int_{(S_1)} |\nu(1)| \left[\int_{(D_1)} \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{10}} \right| \cdot \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{20}} \right| d\tau \right] d\sigma_1 \right\} d\sigma_2. \quad (24)$$

Прежде всего имеем:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{10}} \right| < \frac{1}{r_{10}^2}, \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{20}} \right| < \frac{1}{r_{20}^2},$$

и поэтому

$$\int_{(D_1)} \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{10}} \right| \cdot \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r_{20}} \right| d\tau < \int_{(D_1)} \frac{1}{r_{10}^2} \cdot \frac{1}{r_{20}^2} d\tau.$$

Докажем, что

$$\int_{(D_i)} \frac{1}{r_{10}^2} \cdot \frac{1}{r_{20}^2} d\tau < \frac{C}{r_{12}}. \quad (25)$$

Для доказательства опишем около точки m_1 как центр шар радиуса $2r_{12}$ и обозначим через (ω) часть шара, лежащую в (D_i) . Плоскость, перпендикулярная m_1m_2 и проходящая через середину отрезка m_1m_2 , делит (ω) на части (ω') и (ω'') . Пусть (ω') содержит m_1 , (ω'') содержит m_2 .

Интеграл (25) есть сумма интегралов по $(D_i - \omega)$, (ω') и (ω'') . Оценим каждый из интегралов.

В области (ω') имеем $r_{20} > \frac{r_{12}}{2}$, и поэтому

$$\int_{(\omega')} \frac{1}{r_{10}^2} \cdot \frac{1}{r_{20}^2} d\tau < \frac{4}{r_{12}(\omega')} \int_{(\omega')} \frac{d\tau}{r_{10}^2} < \frac{4}{r_{12}(\omega')} \int_{(\omega)} \frac{d\tau}{r_{10}^2} < \frac{4}{r_{12}^2} \cdot 4\pi(2r_{12})^3 = \frac{32\pi}{r_{12}}.$$

Здесь использовали то обстоятельство, что интеграл от положительной функции по (ω') меньше, чем по (ω) , а последний меньше, чем по полному шару радиуса $2r_{12}$; значение последнего интеграла было получено в § 11 (II).

Получим также аналогичную оценку интеграла по (ω'') , заметив, что (ω'') лежит в шаре с центром в m_2 и радиусом $3r_{12}$.

В области $(D_i - \omega)$ имеем $r_{10} > 2r_{12}$, и поэтому $\frac{r_{12}}{r_{10}} < \frac{1}{2}$. Кроме того $|r_{10} - r_{20}| < r_{12}$ и, следовательно,

$$\left| 1 - \frac{r_{20}}{r_{10}} \right| < \frac{1}{2},$$

откуда следует

$$\frac{1}{2} < \frac{r_{20}}{r_{10}},$$

и, таким образом,

$$\frac{1}{r_{20}} < \frac{2}{r_{10}}.$$

Пусть R означает диаметр области (D_i) . Интеграл по $(D_i - \omega)$ от положительной функции меньше интеграла по сферическому слою с центром в m_1 и радиусами $2r_{12}$ и R .

Поэтому получаем:

$$\begin{aligned} \int_{(D_i - \omega)} \frac{1}{r_{10}} \frac{1}{r_{20}^2} d\tau &< 4 \int_{(D_i - \omega)} \frac{d\tau}{r_{10}^4} < 4 \cdot 4\pi \int_{2r_{12}}^R \frac{\rho^2}{\rho^4} d\rho = \\ &= 16\pi \left(\frac{1}{2r_{12}} - \frac{1}{R} \right) < \frac{8\pi}{r_{12}}. \end{aligned}$$

Таким образом, все интегралы имеют оценку $\frac{A}{r_{12}}$ и поэтому оценка (25) доказана. Отсюда следует, что

$$\int_{(S)} \nu(1) \left| \int_{(D_i)} \left| \frac{\partial \frac{1}{r_{10}}}{\partial x} \right| \cdot \left| \frac{\partial \frac{1}{r_{20}}}{\partial x} \right| d\tau \right] d\sigma_1$$

есть ограниченная функция m_2 во всем пространстве и интеграл по (S_2) наверное существует. Этим самым доказали законность перестановки порядка интегрирования в левой части (23).

Повторяя рассуждения § 4, придем к оценке:

$$\int_{(S)} \frac{1}{r_{10}} \frac{1 + \cos(r_{20}n_0)}{r_{20}^2} d\sigma < \frac{C}{r_{12}^{1-\epsilon}}$$

и, следовательно, приходим к выводу о существовании интеграла

$$\int_{(S_2)} \mu(2) \left\{ \int_{(S)} \nu(1) \left[\int_{(S)} \frac{1}{r_{10}} \frac{1 + \cos(r_{20}n_0)}{r_{20}^2} d\sigma \right] d\sigma_1 \right\} d\sigma_2,$$

что доказывает законность перестановки порядка интегрирования в правой части (23). Формула (18) доказана.

В качестве добавления к тождествам (18) и (19) докажем следующие утверждения, которые нам понадобятся позднее.

1°. Если на (S) имеем $\frac{dV_e}{dn} = 0$, то в случаях обычном и

(Е) потенциал простого слоя V и его плотность равны нулю; в случае (J) V равен нулю вне $(S^{(0)})$, но может равняться отличным от нуля постоянным внутри $(S^{(1)})$, $(S^{(2)})$, ..., $(S^{(k)})$,

Действительно, если $\frac{dV_e}{dn} = 0$, то имеем:

$$\int_{(D_e)} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = - \int_{(\dot{S})} V \frac{dV_e}{dn} d\sigma = 0, \quad (19')$$

а это означает, что в (D_e)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad V = \text{const.}$$

Но в бесконечно удаленной точке $V=0$ и, следовательно, $V=0$ в связной области, содержащей бесконечно удаленную точку. В случаях обычном и (Е) эта связная область совпадает с (D_e) . В случае (J) эта связная область не совпадает с (D_e) ; она не содержит областей внутри $(S^{(1)}, \dots, (S^{(k)}))$, в каждой из которых $V = \text{const.}$

В случаях обычном и (Е) потенциал V , будучи равным нулю в (D_e) , равен нулю по полной границе (S) и формула (19) показывает, что $V = \text{const}$ в (D_i) , и так как $V=0$ на (S) , то $V=0$ в (D_i) .

Если $V=0$ всюду, то

$$0 = \frac{dV_i}{dn} - \frac{dV_e}{dn} = 4\pi\mu, \quad \mu = 0.$$

2°. Если $V=0$ в (D_i) , то $V=0$ всюду. Действительно, так как $V=0$ на (S) , то формула (19') показывает, что производные V равны нулю в (D_e) и, следовательно, $V = \text{const}$ в (D_e) . Так как $V=0$ на (S) , то $V=0$ в (D_e) .

Добавление. Пусть U — гармоническая в (D_i) , а V — потенциал простого слоя. Легко убедиться, что справедлива формула (18), и с ней (19) и (20).

Действительно, если m_1 в D_e , то $\frac{1}{r_{10}}$ — гармоническая в (D_i) и, следовательно, имеем:

$$\begin{aligned} \int_{(\dot{D}_i)} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r_{10}}}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{r_{10}}}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial \frac{1}{r_{10}}}{\partial z} \right) d\tau = \\ = \int_{(\dot{S})} \frac{dU_i}{dn} \frac{1}{r_{10}} d\sigma = - \int_{(\dot{S})} U \frac{\cos(r_{01}n_0)}{r_{01}^2} d\sigma. \quad (26) \end{aligned}$$

Устремляя в (26) точку m_1 на поверхность (S) , умножая получающееся равенство на $\mu(1)$, интегрируя по (S) и переставляя порядок интегрирования, приходим к формуле (18).

Как следствие формулы (20) получаем:

$$V = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{dV_i}{dn} \frac{d\sigma}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} V_i \frac{\cos(rN)}{r^2} d\sigma \quad \text{в } (D_i),$$

$$0 = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{dV_i}{dn} \frac{d\sigma}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} V_i \frac{\cos(rN)}{r^2} d\sigma \quad \text{в } (D_e),$$

и аналогичные для V_e и $\frac{dV_e}{dn}$. Действительно, вывод последних формул в § 8(1) базировался лишь на формуле (20).

§ 7. Доказательство теорем § 5

Обращаясь к доказательству теорем § 5, мы предположим, что ζ_0 — полюс порядка k для функции $\mu(0)$. Таким образом, мы положим:

$$\mu(0) = \frac{\vartheta_1(\zeta, 0)}{\vartheta_1(\zeta)} = \frac{\vartheta_0(0)}{(\zeta - \zeta_0)^k} + \frac{\vartheta_1(0)}{(\zeta - \zeta_0)^{k-1}} + \dots, \quad (17')$$

где $\vartheta_0(0)$ не равна тождественно нулю.

Отсюда

$$W(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \frac{\mu(0) d\sigma_1}{r_{10}} =$$

$$= \frac{1}{(\zeta - \zeta_0)^k} W^{(0)} + \frac{1}{(\zeta - \zeta_0)^{k-1}} W^{(1)} + \dots, \quad (27)$$

$$W^{(0)} = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \frac{\vartheta_0(1) d\sigma_1}{r_{10}},$$

$$W^{(1)} = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \frac{\vartheta_1(1) d\sigma_1}{r_{10}},$$

.....

и где $W^{(0)}$ не равен тождественно нулю, ибо, в противном случае, было бы

$$\vartheta_0(0) \equiv 0,$$

1°. Подставляя W в уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dW_i}{dn} - \frac{dW_e}{dn} &= -\zeta \left(\frac{dW_i}{dn} + \frac{dW_e}{dn} \right) - 2f = \\ &= -\zeta_0 \left(\frac{dW_i}{dn} + \frac{dW_e}{dn} \right) - 2f - (\zeta - \zeta_0) \left(\frac{dW_i}{dn} + \frac{dW_e}{dn} \right) \quad (B) \end{aligned}$$

и сравнивая коэффициенты при $\frac{1}{(\zeta - \zeta_0)k}$, получаем:

$$\frac{dW_i^{(0)}}{dn} - \frac{dW_e^{(0)}}{dn} = -\zeta_0 \left(\frac{dW_i^{(0)}}{dn} + \frac{dW_e^{(0)}}{dn} \right), \quad (28)$$

откуда

$$(1 + \zeta_0) \frac{dW_i^{(0)}}{dn} = (1 - \zeta_0) \frac{dW_e^{(0)}}{dn}. \quad (29)$$

Умножая равенство (29) на $W^{(0)}$ и интегрируя по (S) , получаем при помощи (19) и (19'):

$$(1 + \zeta_0) \int_{(D_i)} \sum \left(\frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} \right)^2 d\tau = - (1 - \zeta_0) \int_{(D_e)} \sum \left(\frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} \right)^2 d\tau. \quad (30)$$

Отсюда следует, что при $\zeta_0 = -1$

$$\int_{(D_e)} \sum \left(\frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} \right)^2 d\tau = 0.$$

Итак, при данном значении ζ , $W^{(0)}$ — константа в (D_e) . Но тогда, в обыкновенном случае и в случае (E), $W^{(0)}$ везде равен нулю, откуда вытекает, — в противоречии со сделанным в начале доказательства предположением, — что $\eta_0(0)$ также равна нулю. Таким образом, число $\zeta_0 = -1$ не может быть полюсом функции μ ни в обыкновенном случае, ни в случае (E).

2°. Предположим теперь, что ζ_0 — комплексное число. Тогда $\eta_0(0)$ и $W^{(0)}$ также могут быть комплексными. Полагаем:

$$W^{(0)} = V^{(1)} + iV^{(2)}.$$

Разделим обе части (29) на $1 + \zeta_0$; мы получим:

$$\frac{dV_i^{(1)}}{dn} + i \frac{dV_i^{(2)}}{dn} = \frac{1 - \zeta_0}{1 + \zeta_0} \left(\frac{dV_e^{(1)}}{dn} + i \frac{dV_e^{(2)}}{dn} \right). \quad (31)$$

Умножая обе части на $V^{(1)} - iV^{(2)}$, имеем:

$$\begin{aligned} V^{(1)} \frac{dV_i^{(1)}}{dn} + V^{(2)} \frac{dV_i^{(2)}}{dn} + i \left(V^{(1)} \frac{dV_i^{(2)}}{dn} - V^{(2)} \frac{dV_i^{(1)}}{dn} \right) = \\ = \frac{1 - \zeta_0}{1 + \zeta_0} \left[V^{(1)} \frac{dV_\rho^{(1)}}{dn} + V^{(2)} \frac{dV_\rho^{(2)}}{dn} + \right. \\ \left. + i \left(V^{(1)} \frac{dV_\rho^{(2)}}{dn} - V^{(2)} \frac{dV_\rho^{(1)}}{dn} \right) \right]. \quad (32) \end{aligned}$$

Интегрируем последнее равенство по (S) . Согласно (20), коэффициенты при i равны нулю; мы получаем:

$$\begin{aligned} \int_{(D_i)} \sum \left(\frac{\partial V^{(1)}}{\partial x} \right)^2 d\tau + \int_{(D_i)} \sum \left(\frac{\partial V^{(2)}}{\partial x} \right)^2 d\tau = \\ = - \frac{1 - \zeta_0}{1 + \zeta_0} \left[\int_{(D_\rho)} \sum \left(\frac{\partial V^{(1)}}{\partial x} \right)^2 d\tau + \int_{(D_\rho)} \sum \left(\frac{\partial V^{(2)}}{\partial x} \right)^2 d\tau \right]. \quad (33) \end{aligned}$$

Выражение в скобках в правой части не равно нулю; в противном случае было бы:

$$V^{(1)} = 0, \quad V^{(2)} = 0, \quad W^{(0)} = 0, \quad \vartheta_0(0) = 0,$$

что невозможно. Итак, это выражение и левая часть (33) — вещественны и положительны, и множитель $\frac{1 - \zeta_0}{1 + \zeta_0}$ — вещественен, откуда вытекает, что и число ζ_0 также вещественно.

3°. Если ζ_0 вещественно и не равно -1 , то равенство (30) имеет вид:

$$\int_{(D_i)} \sum \left(\frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} \right)^2 d\tau = - \frac{1 - \zeta_0}{1 + \zeta_0} \int_{(D_\rho)} \sum \left(\frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} \right)^2 d\tau. \quad (30')$$

Интеграл в правой части этого равенства не равен нулю, так как, в противном случае, оказались бы везде равными нулю $W^{(0)}$ и $\vartheta_0(0)$. Итак, множитель

$$- \frac{1 - \zeta_0}{1 + \zeta_0} = - \frac{\zeta_0 - 1}{\zeta_0 + 1}$$

положителен или равен нулю и $\zeta_0 \geq +1$ или $\zeta_0 < -1$; т. е. функция μ не имеет полюсов, лежащих между -1 и $+1$.

4°. Предположим теперь, что $k > 1$. Сравнивая коэффициенты при $\frac{1}{(\zeta - \zeta_0)^{k-1}}$ в обеих частях (B) после подстановки разложения W , получаем:

$$\frac{dW_i^{(1)}}{dn} - \frac{dW_e^{(1)}}{dn} = -\zeta_0 \left(\frac{dW_i^{(1)}}{dn} + \frac{dW_e^{(1)}}{dn} \right) - \left(\frac{dW_i^{(0)}}{dn} + \frac{dW_e^{(0)}}{dn} \right),$$

откуда

$$(1 + \zeta_0) \frac{dW_i^{(1)}}{dn} = (1 - \zeta_0) \frac{dW_e^{(1)}}{dn} - \left(\frac{dW_i^{(0)}}{dn} + \frac{dW_e^{(0)}}{dn} \right). \quad (34)$$

Умножим (29) на $W^{(1)}$ и (34) на $W^{(0)}$ и вычтем второе произведение из первого. Интегрирование полученного равенства

$$\begin{aligned} & (1 + \zeta_0) \left(W^{(1)} \frac{dW_i^{(0)}}{dn} - W^{(0)} \frac{dW_i^{(1)}}{dn} \right) = \\ & = (1 - \zeta_0) \left(W^{(1)} \frac{dW_e^{(0)}}{dn} - W^{(0)} \frac{dW_e^{(1)}}{dn} \right) + \left(W^{(0)} \frac{dW_i^{(0)}}{dn} + W^{(0)} \frac{dW_e^{(0)}}{dn} \right) \end{aligned}$$

по (S) приводит нас к уравнению:

$$\int_{(D_i)} \sum \left(\frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} \right)^2 d\tau - \int_{(D_e)} \sum \left(\frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} \right)^2 d\tau = 0. \quad (35)$$

Преобразовав (30) к виду

$$(1 + \zeta_0) \int_{(D_i)} \sum \left(\frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} \right)^2 d\tau + (1 - \zeta_0) \int_{(D_e)} \sum \left(\frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} \right)^2 d\tau = 0, \quad (30'')$$

и заметив, что

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 + \zeta_0 & 1 - \zeta_0 \end{vmatrix} = 1 - \zeta_0 + 1 + \zeta_0 = 2,$$

находим, решая систему уравнений (35) и (30''):

$$\int_{(D_i)} \sum \left(\frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} \right)^2 d\tau = 0, \quad \int_{(D_e)} \sum \left(\frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} \right)^2 d\tau = 0.$$

Однако эти равенства невозможны, так как из них вытекало бы, что $W^{(0)} = 0$, $\vartheta_0(0) = 0$. Предположение $k > 1$ приводит к противоречию; k может равняться лишь единице, что и требовалось доказать.

Четыре теоремы § 5 доказаны.

§ 8. Условие, необходимое для того, чтобы $\zeta = 1$ не было полюсом

Подставляя значение μ из (17) в уравнение (7)

$$\mu(0) = -\frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + f(0),$$

получаем:

$$\mathcal{D}_1(\zeta, 0) = -\frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S_1)} \mathcal{D}_1(\zeta, 1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + f(0) \mathcal{D}_1(\zeta). \quad (36)$$

Умножая последнее равенство на $d\sigma$ и интегрируя его по (S) , находим:

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \mathcal{D}_1(\zeta, 0) d\sigma &= \\ &= -\frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S)} d\sigma \int_{(S_1)} \mathcal{D}_1(\zeta, 1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + \mathcal{D}_1(\zeta) \int_{(S)} f(0) d\sigma = \\ &= -\frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S_1)} \mathcal{D}_1(\zeta, 1) \left(\int_{(S)} \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma \right) d\sigma_1 + \\ &\quad + \mathcal{D}_1(\zeta) \int_{(S)} f(0) d\sigma. \end{aligned} \quad (37)$$

Но

$$\int_{(S)} \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma = - \int_{(S)} \frac{\cos(r_{01}N_0)}{r_{01}^2} d\sigma = -2\pi,$$

так как точка m_1 расположена на (S) . Вследствие этого равенство (37) приводится к виду:

$$\int_{(S)} \mathcal{D}_1(\zeta, 0) d\sigma = \zeta \int_{(S_1)} \mathcal{D}_1(\zeta, 1) d\sigma_1 + \mathcal{D}_1(\zeta) \int_{(S)} f(0) d\sigma;$$

отсюда

$$(1 - \zeta) \int_{(S)} \mathcal{D}_1(\zeta, 0) d\sigma = \mathcal{D}_1(\zeta) \int_{(S)} f(0) d\sigma. \quad (37')$$

Предположим, что мы имеем дело с обыкновенным случаем или случаем (J).

Подставляя в (37') $\zeta = 1$, получаем:

$$0 = \mathcal{D}_1(1) \int_{(S)} f(0) d\sigma. \quad (38)$$

Уравнение (38) показывает, что или $\zeta = 1$ один из нулей функции $\mathcal{D}_1(\zeta)$, или что

$$\int_{(S)} f(0) d\sigma = 0; \quad (39)$$

условие (39) наверное удовлетворяется, если $\zeta = 1$ не нуль $\mathcal{D}_1(\zeta)$. Итак

(1) — единственный случай, когда число $\zeta = 1$ может не быть полюсом $\mu(0)$, это — случай, когда удовлетворяется условие (39).

Допустим теперь, что условие (39) выполнено. Из равенства (37') находим:

$$(1 - \zeta) \int_{(S)} \mathcal{D}_1(\zeta, 0) d\sigma = 0,$$

откуда следует, что при $\zeta \neq 1$

$$\int_{(S)} \mathcal{D}_1(\zeta, 0) d\sigma = 0.$$

Но последний интеграл — целая функция ζ . Если он равен нулю при всех значениях ζ , не равных 1, то он обращается в нуль и при $\zeta = 1$. Итак

(2) — при наличии условия (39):

$$\int_{(S)} \mathcal{D}_1(1, 0) d\sigma = 0. \quad (40)$$

Предположим теперь, что $\zeta = 1$ нуль $\mathcal{D}_1(\zeta)$. Разделив (37') на $(1 - \zeta)$ и положив затем $\zeta = 1$, получаем:

$$\int_{(S)} \mathcal{D}_1(1, 0) d\sigma = - \mathcal{D}'_1(1) \int_{(S)} f(0) d\sigma. \quad (41)$$

Так как $z = 1$ простой полюс μ , то $\mathcal{D}_1'(1)$ отлично от нуля, таким образом

(3) если $z = 1$ полюс $\mu(0)$, то выражение $\int_{(S)} \mathcal{D}_1(1, 0) d\tau$

обращается в нуль лишь в том случае, когда имеет место условие (39).

В случае (E) условие (39) должно быть видоизменено. Вместо того, чтобы интегрировать равенство (36) по всей совокупности границ (S) , мы его проинтегрируем по каждой из границ $(S^{(l)})$, $l = 1, 2, \dots, k$ — в отдельности. Мы получим, вместо (37), следующие равенства:

$$\int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}_1(z, 0) d\tau = -\frac{z}{2\pi} \int_{(S)} \mathcal{D}_1(z, 1) \left(\int_{(S^{(l)})} \frac{\cos \frac{(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\tau \right) d\tau_1 + \\ + \mathcal{D}_1(z) \int_{(S^{(l)})} f(0) d\tau. \quad (37_1)$$

Имеем

$$\int_{(S^{(l)})} \frac{\cos \frac{(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\tau = - \int_{(S^{(l)})} \frac{\cos \frac{(r_{01} N_0)}{r_{10}^2} d\tau;$$

этот интеграл не равен нулю лишь в том случае, когда точка m_1 расположена на $(S^{(l)})$, так как все точки границ $(S^{(i)})$, $i \neq l$, лежат вне пространства, ограниченного $(S^{(l)})$.

Таким образом, равенства (37₁) могут быть приведены к следующему виду:

$$\int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}_1(z, 0) d\tau = z \int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}_1(z, 0) d\tau + \mathcal{D}_1(z) \int_{(S^{(l)})} f(0) d\tau; \\ (l = 1, 2, \dots, k);$$

отсюда

$$\left. \begin{aligned} (1 - z) \int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}_1(z, 0) d\tau &= \mathcal{D}_1(z) \int_{(S^{(l)})} f(0) d\tau, \\ (l &= 1, 2, \dots, k). \end{aligned} \right\} \quad (37'_1)$$

Повторяя рассуждения, проведенные для обыкновенного случая и случая (J), приходим к следующим выводам:

1°. Единственный случай, когда число $\zeta = 1$ может не быть полюсом $\mu(0)$, это случай, когда имеют место следующие k условий:

$$\int_{(S^{(l)})} f(0) d\sigma = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, k). \quad (39')$$

2°. Если существуют k условий (39'), то можно сказать то же самое и о k равенствах:

$$\int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}_1(1, 0) d\sigma = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, k). \quad (40')$$

Если $\zeta = 1$ полюс функции $\mu(0)$, то мы имеем:

$$\int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}_1(1, 0) d\sigma = -\mathcal{D}'_1(1) \int_{(S^{(l)})} f(0) d\sigma, \quad (l = 1, 2, \dots, k); \quad (41')$$

равенства (41') приводят к следующему заключению:

3°. Если $\zeta = 1$ полюс функции $\mu(0)$, то интеграл

$$\int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}_1(1, 0) d\sigma$$

может тогда лишь обратиться в нуль при некотором определенном l , когда для этого значения l

$$\int_{(S^{(l)})} f(0) d\sigma = 0.$$

§ 9. Достаточность найденных условий

Лемма. Если функция $\rho(0)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \rho(1) \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1, \quad (42)$$

т. е. если $\rho(0)$ принадлежит к числу фундаментальных функций уравнения (7), связанных с полюсом $\zeta = 1$, то потенциал

$$V = \int_{(S_1)} \frac{\rho(1) d\sigma_1}{r_{10}} \quad (43)$$

остается постоянным в области (D_1) .

Используя (42), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i}{dn} - \frac{dV_e}{dn} &= 4\pi\rho(0) = -2 \int_{(S_1)} \rho(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\tau = \\ &= -2 \frac{dV}{dn} = -\left(\frac{dV_i}{dn} + \frac{dV_e}{dn}\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dV_i}{dn} = 0, \quad \int_{(D_i)} \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)^2 d\tau = 0,$$

т. е. что $V = C$ в (D_i) , что и требовалось доказать.

Заметим, что в случае (E) эта константа имеет некоторое определенное значение внутри каждой области, ограниченной поверхностью $(S^{(l)})$, могущее изменяться при переходе из одной области в другую. В случае (E) — для точки m_1 , находящейся внутри $(S^{(l)})$, $l = 1, 2, \dots, k$, — следует писать полученное равенство в виде: $V = C^{(l)}$.

При доказательстве достаточности условий (39) и (39') мы рассмотрим в отдельности: обыкновенный случай и случай (J); случай (E).

1°. Предположим, что мы имеем дело с обыкновенным случаем или случаем (J), и что условие (39)

$$\int_{(S)} f(0) d\sigma = 0$$

удовлетворено.

Пусть $\zeta = 1$ полюс функции μ . В таком случае справедливо равенство (40).

Подставляя $\zeta = 1$ в уравнение (36)

$$\mathcal{D}_1(\zeta, 0) = -\frac{\zeta}{2\pi} \int_{(\dot{S}_1)} \mathcal{D}_1(\zeta, 1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\tau_1 + \mathcal{D}_1(\zeta)f(0),$$

получим:

$$\mathcal{D}_1(1, 0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(\dot{S}_1)} \mathcal{D}_1(1, 1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\tau_1, \quad (44)$$

т. е. убедимся, что $\mathcal{D}_1(1, 0)$ есть решение уравнения (42). Вследствие этого, на основании леммы, имеем:

$$V = \int_{(S_1)} \frac{\mathcal{D}_1(1, 1) d\sigma_1}{r_{10}} = C \text{ в } (D_1). \quad (43)$$

Введем новую функцию гошек на (S) , полагая

$$f_0(0) = 1.$$

Находим

$$\int_{(S)} f_0(0) d\sigma = S, \quad (44)$$

где S — сумма площадей границ совокупности (S) . Если $\overline{\mu(0)}$ есть значение $\mu(0)$, соответствующее $f_0(0)$, то

$$\overline{\mu(0)} = \frac{\overline{\mathcal{D}_1(\zeta, 0)}}{\mathcal{D}_1(\zeta)},$$

где $\overline{\mathcal{D}_1(\zeta, 0)}$ и $\mathcal{D}_1(\zeta)$ — некоторые целые функции, полученные при подстановке $f_0(0)$ вместо $f(0)$ в равенство (17).

Из (46) следует, что $\zeta = 1$ — вероятное полюс функции $\overline{\mu(0)}$ имеем:

$$\int_{(S)} \overline{\mathcal{D}_1(1, 0)} d\sigma = -\overline{\mathcal{D}'_1(1)} S.$$

Уравнение

$$\overline{\mathcal{D}_1(\zeta, 0)} = -\frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S_1)} \overline{\mathcal{D}_1(\zeta, 1)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + \overline{\mathcal{D}_1(\zeta)} f_0(0)$$

приводит нас к равенству

$$\overline{\mathcal{D}_1(1, 0)} = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \overline{\mathcal{D}_1(1, 1)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1,$$

показывающему, что $\overline{\mathcal{D}_1(1, 0)}$ также представляет собою решение уравнения (42).

Отсюда следует, что

$$V_0 = \int_{(S)} \frac{\overline{\mathcal{D}_1(1, 1)}}{r_{10}} d\sigma_1 = C_0 \text{ в } (D_1). \quad (45)$$

Умножим $\overline{\mathcal{D}_1(1, 0)}$ на $V d\sigma$ и проинтегрируем произведение по (S) . Поскольку, с одной стороны, V равно C на (S) , мы получаем:

$$\int_{(S)} \overline{\mathcal{D}_1(1, 0)} V d\sigma = C \int_{(S)} \overline{\mathcal{D}_1(1, 0)} d\sigma = -\overline{\mathcal{D}'_1(1)} SC.$$

С другой стороны, равенства (40) и (45₁) нам дают:

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \overline{\mathcal{D}_1(1, 0)} V d\sigma &= \int_{(S)} \overline{\mathcal{D}_1(1, 0)} \left(\int_{(S_1)} \frac{\mathcal{D}_1(1, 1) d\sigma_1}{r_{10}} \right) d\sigma = \\ &= \int_{(S_1)} \mathcal{D}_1(1, 1) \left(\int_{(S)} \frac{\overline{\mathcal{D}_1(1, 0)} d\sigma}{r_{10}} \right) d\sigma_1 = C_0 \int_{(S_1)} \mathcal{D}_1(1, 1) d\sigma_1 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$-\overline{\mathcal{D}'_1(1)} SC = 0, \quad C = 0.$$

Но если потенциал простого слоя равен нулю в (D_i) , то он везде равен нулю; отсюда получается равенство

$$\mathcal{D}_1(1, 0) \equiv 0,$$

показывающее, что $\zeta = 1$ есть нуль функции $\mathcal{D}_1(\zeta, 0)$. Но $\zeta = 1$ нуль функции $\mathcal{D}_1(\zeta)$; таким образом, дробь $\frac{D_1(\zeta, 0)}{D_1(\zeta)}$ сократима, что противоречит сделанному выше предположению. В итоге, мы видим, что две гипотезы: 1) $\zeta = 1$ корень $\mathcal{D}_1(\zeta)$; 2) выполнено условие (39) — противоречат друг другу; $\zeta = 1$ не может быть полюсом $\mu(0)$.

Для доказательства достаточности условий (39') в случае (E) следует слегка изменить изложенные выше рассуждения.

Рассматривая случай (E) и считая, что имеют место k условий (39'), предположим, что $\zeta = 1$ полюс $\mu(0)$. В таком случае справедливо (40') и мы заключаем из (36), что

$$V = \int_{(S_1)} \frac{\mathcal{D}_1(1, 1) d\sigma}{r_{10}} = C^{(l)} \text{ внутри } (S^{(l)}), \quad (l = 1, 2, \dots, k) \quad (45')$$

Введем новую функцию $f_0(0)$ точки на S , полагая

$$f_0(0) = \sigma^{(l)} \text{ на } (S^{(l)}), \quad (l = 1, 2, \dots, k),$$

где $\sigma^{(l)}$ произвольно выбранные положительные числа.

Имеем

$$\int_{(\tilde{S})} f_0(0) d\sigma = \sum_{l=1}^{l=k} \int_{(S^{(l)})} f_0(0) d\sigma = \sum_{l=1}^{l=k} \alpha^{(l)} S^{(l)} \neq 0. \quad (46')$$

Если $\overline{\mu(0)}$ функция μ , соответствующая $f_0(0)$, то можно написать:

$$\overline{\mu(0)} = \frac{\overline{\mathcal{D}_1(\zeta, 0)}}{\overline{\mathcal{D}_1(\zeta)}},$$

где $\overline{\mathcal{D}_1(\zeta, 0)}$ и $\overline{\mathcal{D}_1(\zeta)}$ — целые функции ζ ; на основании (46') $\zeta = 1$ — наверное нуль $\overline{\mathcal{D}_1(\zeta)}$. Сверх того, имеем:

$$\int_{(S^{(l)})} \overline{\mathcal{D}_1(1, 0)} d\sigma = -\overline{\mathcal{D}'_1(1)} \alpha^{(l)} S^{(l)}, \quad (l = 1, 2, \dots, k)$$

и

$$\overline{\mathcal{D}_1(1, 0)} = -\frac{1}{2\pi} \int_{(\tilde{S}_1)} \overline{\mathcal{D}_1(1, 1)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1.$$

Вследствие этого

$$V_0 = \int_{(\tilde{S}_1)} \frac{\overline{\mathcal{D}_1(1, 1)}}{r_{10}} d\sigma_1 = C_0^{(l)} \text{ внутри } (S^{(l)}), \quad (46'')$$

$$(l = 1, 2, \dots, k).$$

Из всего этого выводим:

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \overline{\mathcal{D}_1(1, 0)} V d\sigma &= \sum_{l=1}^{l=k} \int_{(S^{(l)})} \overline{\mathcal{D}_1(1, 0)} V d\sigma = \\ &= \sum_{l=1}^{l=k} C^{(l)} \int_{(S^{(l)})} \overline{\mathcal{D}_1(1, 0)} d\sigma = -\overline{\mathcal{D}'_1(1)} \sum_{l=1}^{l=k} C^{(l)} \alpha^{(l)} S^{(l)}. \end{aligned}$$

Затем

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \overline{\mathcal{D}_1(1, 0)} V d\sigma &= \\ &= \int_{(\tilde{S}_1)} \overline{\mathcal{D}_1(1, 0)} \left(\int_{(\tilde{S}_1)} \frac{\mathcal{D}_1(1, 1) d\sigma_1}{r_{10}} \right) d\sigma = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{(S_1)} \mathcal{D}_1(1, 1) \left(\int_{(S)} \frac{\overline{\mathcal{D}_1(1, 0)} d\sigma}{r_{10}} \right) d\sigma_1 = \\
 &= \sum_{l=1}^{l=k} \int_{(S_0^{(l)})} \mathcal{D}_1(1, 1) \left(\int_{(S)} \frac{\overline{\mathcal{D}_1(1, 0)} d\sigma}{r_{10}} \right) d\sigma_1 = \\
 &= \sum_{l=1}^{l=k} C_0^{(l)} \int_{(S_1^{(l)})} \mathcal{D}_1(1, 1) d\sigma_1 = 0.
 \end{aligned}$$

Итак, при любых $\alpha^{(l)}$

$$\sum_{l=1}^{l=k} C^{(l)} \alpha^{(l)} S^{(l)} = 0,$$

что возможно лишь в том случае, когда

$$C^{(l)} = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, k).$$

Из последних равенств заключаем, что V равен нулю в (D_i) и, следовательно, везде равен нулю; таким образом,

$$\mathcal{D}_1(1, 0) = 0.$$

Последнее равенство невозможно, ибо из него вытекает вывод о возможности сокращения общих множителей в числителе и знаменателе функции $\mu(0)$.

Условие (39') вновь оказывается в противоречии с предположением $\mathcal{D}_1(1) = 0$.

§ 10. Решение внутренней задачи Неймана

Обыкновенный случай. Заметим, прежде всего, что при исследовании внутренней задачи Неймана мы не можем записывать по произволу функцию f .

Принимая во внимание, что постоянная есть гармоническая функция в (D_i) , мы замечаем из формулы (18) § 6, что

$$\int_{(S)} \frac{dV_i}{dn} d\sigma = 0.$$

Отсюда следует, что при наличии условия

$$\frac{dV_i}{dn} = f$$

должно также иметь место равенство (39).

Итак, условие (39) есть необходимое условие возможности данной задачи.

Но мы видели в предыдущем параграфе, что при выполнении условия (39) число $\zeta = 1$ не может быть полюсом мероморфной функции (9)

$$\mu(0) = \frac{\mathcal{D}_1(\zeta, 0)}{\mathcal{D}_1(\zeta)} = \rho_0 + \zeta \rho_1 + \zeta^2 \rho_2 + \dots,$$

у которой

$$\rho_0 = f, \dots, \rho_n = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \rho_{n-1}(1) \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1.$$

Число $\zeta = 1$ не может также быть полюсом функции (11)

$$W = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \frac{\mu(1) d\sigma_1}{r_{10}} = V_1 + \zeta V_2 + \zeta^2 V_3 + \dots,$$

где

$$V_k = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \frac{\rho_k(1) d\sigma_1}{r_{10}} = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \frac{dV_{k-1}}{dn} \frac{d\sigma_1}{r_{10}}.$$

Функции (9) и (11) не имеют полюсов, заключенных в промежутке от $\zeta = -1$ до $\zeta = +1$; $\zeta = -1$ также не может быть их полюсом; поэтому можно подставить в (11) значение $\zeta = 1$. Находим

$$W = V_1 + V_2 + V_3 + \dots, \quad (47)$$

причем, согласно замечаниям § 2,

$$\frac{dW_i}{dn} = -f.$$

Итак, решение поставленной задачи определяется рядом

$$V = -V_1 - V_2 - V_3 - \dots \quad (47')$$

На основании равномерной сходимости ряда

$$\mu_1(0) = \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \dots \quad (9')$$

на (S) , имеем:

$$V = - \frac{1}{2\pi} \int_{(\bar{S})} \frac{\mu_1(0) d\sigma}{r_{10}}.$$

Таким образом, V действительно имеет нормальную производную, удовлетворяющую условию

$$\frac{dV_i}{dn} = f,$$

ибо функция (9') представляет собою решение уравнения (7) при $\zeta = 1$.

Заметим, что постоянная есть гармоническая функция в (D_1) , нормальная производная которой на (S) равна нулю; мы можем, поэтому, при решении внутренней задачи прибавить к найденной функции V произвольную константу. Это замечание находится в полном согласии с доказанными выше теоремами. К каждому решению μ уравнения (7) при $\zeta = 1$ можно, очевидно, добавить произвольное решение однородного уравнения (42); эта операция, согласно лемме § 9, имеет последствием добавление к V некоторого постоянного количества.

Случай (J). В случае (J), как и в обыкновенном случае, выполнение (39) есть необходимое условие возможности внутренней задачи. Рассуждения, проведенные выше для обыкновенного случая, сохраняют силу и для случая (J).

Но в случае (J) функция (9) может допускать два полюса: $\zeta = 1$ и $\zeta = -1$; при выполнении условия (39) исчезает лишь полюс $\zeta = 1$. Мы не можем найти значение функции W , подставив $\zeta = 1$ в ряд (11), так как радиус сходимости этого ряда равен единице.

Умножаем функцию W на $1 + \zeta$; получаем:

$$(1 + \zeta)W = V_1 + (V_2 + V_1)\zeta + (V_3 + V_2)\zeta^2 + \dots + \\ + (V_n + V_{n-1})\zeta^{n-1} + \dots$$

Поскольку $\zeta = -1$ простой полюс функции W , постольку что значение уже не может быть полюсом функции $(1 + \zeta)W$; учитывая, что $\zeta = 1$ также не полюс этой функции, заключаем, что радиус сходимости последнего ряда больше единицы и что поэтому возможно в него подставить значение $\zeta = 1$.

Мы приходим к формуле

$$W = \frac{1}{2} [V_1 + (V_2 + V_1) + (V_3 + V_2) + \dots + (V_n + V_{n-1}) + \dots]. \quad (48)$$

Искомое решение получается в виде ряда

$$V = -\frac{1}{2} [V_1 + (V_2 + V_1) + (V_3 + V_2) + \dots + (V_n + V_{n-1}) + \dots]. \quad (48')$$

Как и для обыкновенного случая, возможно убедиться, что V действительно потенциал простого слоя и, следовательно, допускает нормальную производную, удовлетворяющую условиям задачи.

Сделанное выше замечание насчет самого общего решения задачи остается в силе: для получения этого решения следует прибавить к найденной функции произвольную постоянную.

Случай Е. В случае (Е) можно применить формулу (18) к каждой области, ограниченной поверхностью $(S^{(l)})$. Отсюда следует, что внутренняя задача Неймана возможна лишь при выполнении k условий (39')

$$\int_{(S^{(l)})} f d\sigma = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, k).$$

Если эти k условий удовлетворены, то $\zeta = 1$ не может быть полюсом для функций (9) и (11). В рассматриваемом случае (Е), $\zeta = -1$ для них также не полюс, и у них не имеется полюсов между -1 и $+1$.

Итак, радиус сходимости ряда (11) больше единицы; полагая в нем $\zeta = 1$, имеем:

$$W = V_1 + V_2 + V_3 + \dots \quad (49)$$

Решение внутренней задачи Неймана получается в виде ряда

$$V = -V_1 - V_2 - V_3 - \dots \quad (49')$$

Мы заметили, что исследование данного случая может быть заменено изучением k внутренних задач Неймана. Однако функция, которая определяла бы решение для области, ограниченной $(S^{(l)})$, имела бы значение лишь для точек внутри

той области, тогда как только что найденное нами решение дает искомую функцию в виде одного единственного ряда, годного для всех внутренних областей.

К найденному решению V можно добавить функцию, которая остается постоянной в каждой из областей, ограниченных поверхностями $(S^{(b)})$, но значение которой изменяется при переходе от одной области к другой.

Это находится в согласии с леммой § 9 для случая (E); добавляя к μ решения однородного уравнения, мы лишь прибавляем к V константы, обладающие указанными выше свойствами.

Сделаем небольшое замечание о связи между задачами А и В. Условие (39) получено как необходимое и достаточное условие разрешимости задачи В. Следовательно, оно является и достаточным условием разрешимости задачи А. Является ли оно необходимым? Покажем, что это так. Для определенности рассмотрим обыкновенный случай.

Допустим, что функция U гармоническая внутри (D_i) на границе (S) удовлетворяет условию (1), причем

$$\int_{(S)} f d\sigma = cS, \quad c \neq 0.$$

Тогда функция $f_1 = f - c$ удовлетворяет условию (39) и, следовательно, найдется потенциал простого слоя V такой, что $\frac{dV_i}{dn} = f_1$. Тогда гармоническая внутри (D_i) функция $W = U - V$ на границе (S) удовлетворяет условию

$$\frac{dW_i}{dn} = c.$$

Если $c > 0$, то это означает, что функция W убывает, если движется по нормали от точки границы и, следовательно, точка минимума функции W не может быть на границе области (D_i) , что противоречит основному свойству гармонической функции.

Точно так же невозможно $c < 0$. Это доказывает необходимость условия (39) для разрешимости задачи А.

Отсюда также следует, что всякое решение задачи А представимо потенциалом простого слоя и таким образом эквивалентность задач А и В доказана.

§ 11. Решение внешней задачи Неймана для случая (E) и для обыкновенного случая

Мы получим решение внешней задачи Неймана, определяя значение функции W при $\zeta = -1$. Число $\zeta = -1$ не может быть полюсом этой функции ни в случае (E), ни в обыкновенном случае, но $\zeta = 1$ может оказаться ее полюсом, так как во внешней задаче значения f не подчинены никакому условию. Вследствие этого нельзя подставлять в ряд (11) значение $\zeta = -1$.

Но $\zeta = 1$ — простой полюс W , поэтому функция $(1 - \zeta)W$ голоморфна в окрестности $\zeta = 1$, и можно найти искомое значение W , подставив $\zeta = -1$ в ряд

$$(1 - \zeta)W = V_1 + (V_2 - V_1)\zeta + (V_3 - V_2)\zeta^2 + \dots + \\ + (V_n - V_{n-1})\zeta^{n-1} + \dots$$

Выполнив эту подстановку, находим, что функция V , удовлетворяющая условию

$$\frac{dV_e}{dn} = f \quad \text{на } (S),$$

выражается равенством

$$V = \frac{1}{2} [V_1 - (V_2 - V_1) + (V_3 - V_2) + \dots + \\ + (-1)^{n-1} (V_n - V_{n-1}) + \dots]. \quad (50)$$

В следующих параграфах мы дадим решение внешней задачи Неймана для случая (J); в этом случае функция W допускает полюс $\zeta = -1$, и ряд (50) теряет смысл.

§ 12. Фундаментальные функции полюса $\zeta = 1$ и задача Робэна для обыкновенного случая

В обыкновенном случае $\zeta = -1$ не может быть полюсом функции $\mu(0)$; при выполнении условия (39)

$$\int f d\tau = 0, \quad (39)$$

$\zeta = 1$ для нее — также не полюс. Вследствие этого ряд (9)

$$\mu(0) = \rho_0 + \zeta \rho_1 + \dots + \zeta^n \rho_n + \dots$$

имеет радиус сходимости больше единицы. Таким образом, возможно найти такое положительное число τ меньшее единицы, что ряд (9) будет сходиться при $\zeta = \frac{1}{\tau}$ ($0 < \tau < 1$), и что общий член преобразованного ряда

$$\frac{\rho_n}{\tau^n}$$

будет бесконечно малым.

При наличии условия (39):

$$|\rho_n| < \tau^n \quad \text{для } n \geq N. \quad (51)$$

Если функция f — произвольная, то радиус сходимости ряда (9) равен единице. Но $\zeta = -1$ не полюс функции μ , а $\zeta = 1$ — простой полюс, поэтому радиус сходимости ряда

$$(1 - \zeta)\mu(0) = \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0)\zeta + \dots + (\rho_n - \rho_{n-1})\zeta^n + \dots$$

больше единицы, и существует такое число $\tau < 1$, что

$$\frac{\rho_n - \rho_{n-1}}{\tau^n}$$

будет бесконечно малым.

Отсюда следует, что для какой угодно функции f

$$|\rho_n - \rho_{n-1}| < \tau^n, \quad \text{если } n \geq N \quad (0 < \tau < 1). \quad (52)$$

При $m > n$ имеем:

$$\rho_m - \rho_n = (\rho_m - \rho_{m-1}) + (\rho_{m-1} - \rho_{m-2}) + \dots + (\rho_{n+1} - \rho_n);$$

отсюда следует, что

$$|\rho_m - \rho_n| \leq |\rho_m - \rho_{m-1}| + \dots + |\rho_{n+1} - \rho_n| < \tau^{n-1} + \dots + \tau^m < \frac{\tau^{n+1}}{1 - \tau} < a\tau^n;$$

таким образом, для какой угодно функции f

$$|\rho_m - \rho_n| < a\tau^n, \quad \text{если } n \geq N, \quad m > n, \quad (0 < \tau < 1). \quad (53)$$

Последнее неравенство называется принципом Робэна. Оно показывает, что ρ_n стремится к пределу при безграничном возрастании n . Обозначим этот предел через ρ

$$\lim \rho_n = \rho \quad (n \rightarrow \infty).$$

Неравенство (51) показывает, что при выполнении условия (39) $\rho = 0$.

Заметим, что ρ_n равномерно стремится к пределу на (S) : для нахождения неравенства (53) нам не потребовалось вводить предположений о положении рассматриваемой нами точки на упомянутой поверхности.

Принимая во внимание (10) и что ρ_n равномерно стремится к пределу, мы можем произвести переход к пределу под знаком интеграла и написать:

$$\rho = -\frac{1}{2\pi} \int_{(\dot{S}_1)} \rho(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1; \quad (54)$$

таким образом, ρ , если она не равна нулю, есть одна из фундаментальных функций полюса $\zeta = 1$ для уравнения (7)

$$\mu(0) = -\frac{\zeta}{2\pi} \int_{(\dot{S}_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + f(0).$$

Проинтегрируем по (S) последнее из равенств (10). Получаем:

$$\begin{aligned} \int_{(\dot{S})} \rho_n(0) d\sigma &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(\dot{S})} \left(\int_{(\dot{S}_1)} \rho_{n-1}(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \right) d\sigma = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(\dot{S}_1)} \rho_{n-1}(1) \left(\int_{(\dot{S})} \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma \right) d\sigma_1 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \rho_{n-1}(1) \left(\int_{(S)} \frac{\cos(r_{01}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma \right) d\sigma_1 = \int_{(\dot{S}_1)} \rho_{n-1}(1) d\sigma_1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{(\dot{S})} \rho_n(0) d\sigma = \int_{(\dot{S})} \rho_{n-1}(0) d\sigma = \dots = \int_{(\dot{S})} \rho_0(0) d\sigma = \int_{(\dot{S})} f(0) d\sigma;$$

переходя в последнем равенстве к пределу, находим:

$$\int_{(\dot{S})} \rho(0) d\sigma = \int_{(\dot{S})} f(0) d\sigma.$$

Отсюда следует, что если условие (39) не выполнено, то ρ не равна нулю; таким образом, в этом случае, ρ — одна из фундаментальных функций уравнения (7).

Произведение $C\rho$, где C — постоянная, также представляет собой решение уравнения (54). Покажем, что это решение — наиболее общее, т. е. что не существует фундаментальной функции полюса $\zeta=1$, линейно независимой от ρ . Предположим, что функции f' и f'' связаны соотношением

$$\int_{(S)} f' d\sigma = \int_{(S)} f'' d\sigma. \quad (55)$$

Пусть ρ' — функция, соответствующая f' :

$$\rho' = \lim \rho'_n \quad (n \rightarrow \infty), \quad \rho'_0 = f',$$

$$\rho'_n = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \rho'_{n-1} \frac{\cos(r_{10}N_n)}{r_{10}^2} d\sigma_1;$$

аналогично, пусть ρ'' — функция, соответствующая f'' .

Найдем решение, которое соответствует функции $f' - f''$. Если обозначить такое решение через ρ , то

$$\rho = \lim \rho_n = \lim (\rho'_n - \rho''_n), \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$\text{где } \rho_0 = f' - f'' = \rho'_0 - \rho''_0.$$

Отсюда следует, что $\rho = \rho' - \rho''$; но $\rho = 0$, так как

$$\int_{(S)} (f' - f'') d\sigma = 0$$

на основании (55); итак,

$$\rho' = \rho'';$$

т. е. различные функции f' , f'' , связанные соотношением (55), приводят к одному и тому же решению.

Если функции f' и f'' не связаны соотношением (55), то возможно найти число b , удовлетворяющее уравнению

$$b \int_{(S)} f' d\sigma = \int_{(S)} f'' d\sigma. \quad (55')$$

Решение, соответствующее bf' , равно $b\rho'$; в самом деле, при умножении f' на b , ρ'_n также умножается на b . Таким образом, имеем:

$$b\rho' = \rho''.$$

Итак, какова бы ни была функция f , способ Стеклова — Робэна приводит к решениям уравнения (54), отличающимся друг от друга лишь постоянным множителем; множитель этот, ввиду существования уравнения

$$\int_{(S)} \rho d\sigma = \int_{(S)} f d\sigma,$$

вполне определяется значением

$$\int_{(S)} f d\sigma.$$

Остается еще выяснить, возможно ли получить этим способом все решения уравнения (54).

Пусть ρ — некоторое решение (54). Положим $f = \rho$; имеем:

$$\rho_0 = \rho,$$

$$\rho_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \rho \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma = \rho,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\rho_n = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \rho \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma = \rho, \quad \lim \rho_n = \rho;$$

мы видим, что по способу Стеклова — Робэна, действительно, может быть получено какое угодно решение уравнения (54).

Согласно лемме § 9, потенциал (43)

$$V = \int_{(S)} \frac{\rho(1) d\sigma_1}{r_{10}}$$

имеет постоянную величину в области (D_i) , если функция ρ удовлетворяет уравнению (54).

Принимая это во внимание, заключаем, что, определив ρ , мы тем самым разрешили электростатическую задачу (задачу Робэна): *найти на поверхности (S) распределение электричества, не оказывающее никакого действия на точку внутри (S).*

Отсюда также вытекает, что, если задан общий электрический заряд на (S)

$$\int_{(S)} \rho d\sigma = M,$$

то данная задача является вполне определенной. Для нахождения решения, соответствующего этому случаю, достаточно положить:

$$f = \frac{M}{S};$$

мы тогда, очевидно, получим:

$$\int_{(S)} p \, d\sigma = \frac{M}{S} \int_{(S)} d\sigma = M.$$

§ 13. Фундаментальные функции полюса $\zeta = 1$ и задача Робэна для случая (J)

В случае (J), значения $\zeta = 1$ и $\zeta = -1$ могут быть, вообще говоря, полюсами функции μ .

Предположим сначала, что условие (39) выполнено. В этом случае $\zeta = 1$ не может быть полюсом μ , значение же $\zeta = -1$, если оно полюс, есть полюс простой; отсюда следует, что функция

$$(1 + \zeta) \mu = \rho_0 + (\rho_1 + \rho_0) \zeta + (\rho_2 + \rho_1) \zeta^2 + \dots \quad (56)$$

не допускает ни полюса $\zeta = 1$, ни полюса $\zeta = -1$. Таким образом, радиус сходимости ряда (56) больше единицы, и отношение

$$\frac{\rho_n + \rho_{n-1}}{\tau^n},$$

при некотором значении числа τ , меньшем единицы, становится бесконечно малым, когда $n \rightarrow \infty$; имеем:

$$|\rho_n + \rho_{n-1}| < \tau^n, \quad \text{если } n \geq N.$$

Последнее неравенство показывает, что, при наличии условия (39)

$$\lim (\rho_n + \rho_{n-1}) = 0.$$

Предположим теперь, что f — произвольная функция. Если μ имеет полюс $\zeta = 1$, то этот полюс — простой, и функция

$$\begin{aligned} (1 + \zeta)(1 - \zeta) \mu &= \rho_0 + (\rho_1 + \rho_2 - \rho_0) \zeta + \\ &+ \{(\rho_2 + \rho_1) - (\rho_1 + \rho_0)\} \zeta^2 + \dots + \\ &+ \{(\rho_n + \rho_{n-1}) - (\rho_{n-1} + \rho_{n-2})\} \zeta^n + \dots \end{aligned} \quad (57)$$

не допускает ни полюса $\zeta = 1$, ни полюса $\zeta = -1$; радиус сходимости ряда (57) больше единицы и мы, поэтому, имеем, для некоторого $\tau < 1$:

$$|(\rho_n + \rho_{n-1}) - (\rho_{n-1} + \rho_{n-2})| < \tau^n, \quad \text{если } n \geq N.$$

Буквально повторяя рассуждения § 12, мы получим следующее неравенство, аналогичное неравенству (53):

$$|(\rho_m + \rho_{m-1}) - (\rho_n + \rho_{n-1})| < \tau^n \quad (m > n), \quad \text{если } n \geq N, \quad (58)$$

и показывающее, что

$$\rho_n + \rho_{n-1} \quad (59)$$

стремится к пределу; пусть этот предел равняется ρ . Совершенно ясно, что величина (59) стремится к своему пределу равномерно на (S) .

Имеем

$$\left. \begin{aligned} \rho_n &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(\dot{S}_1)} \rho_{n-1}(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1, \\ \rho_{n-1} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(\dot{S}_1)} \rho_{n-2}(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1; \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

отсюда

$$\rho_n + \rho_{n-1} = -\frac{1}{2\pi} \int_{(\dot{S}_1)} [\rho_{n-1}(1) + \rho_{n-2}(1)] \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1.$$

Переходя к пределу, находим

$$\rho = -\frac{1}{2\pi} \int_{(\dot{S}_1)} \rho(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1; \quad (61)$$

таким образом, ρ , если она отлична от нуля, есть одна из фундаментальных функций уравнения (7), соответствующих полюсу $z=1$. Интегрируя по (S) первое из равенств (60), получаем:

$$\begin{aligned} \int_{(\dot{S})} \rho_n d\sigma &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \left(\int_{(\dot{S}_1)} \rho_{n-1}(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \right) d\sigma = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{(\dot{S}_1)} \rho_{n-1}(1) \left(\int_{(\dot{S})} \frac{\cos(r_{01}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma \right) d\sigma_1 = \int_{(\dot{S}_1)} \rho_{n-1}(1) d\sigma_1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \int_{(\dot{S})} \rho_n d\sigma &= \int_{(\dot{S})} \rho_{n-1} d\sigma = \dots = \int_{(\dot{S})} \rho_0 d\sigma = \int f d\sigma, \\ \int_{(\dot{S})} (\rho_n + \rho_{n-1}) d\sigma &= 2 \int_{(\dot{S})} f d\sigma; \end{aligned}$$

переходя к пределу, находим:

$$\int_{(\dot{S})} \rho d\sigma = 2 \int_{(\dot{S})} f d\sigma,$$

из последнего равенства заключаем, что $\rho \neq 0$, если не имеет места условие (39). Интегрируя (60) по одной из внутренних поверхно-

тей ($S^{(l)}$), мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{(S^{(l)})} \rho_n d\sigma &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(S^{(l)})} \left(\int_{(S_1)} \rho_{n-1}(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \right) d\sigma = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \rho_{n-1}(1) \left(\int_{(S^{(l)})} \frac{\cos(r_{01}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma \right) d\sigma_1 = - \int_{(S_1^{(0)})} \rho_{n-1}(1) d\sigma_1; \end{aligned}$$

и самом деле, интеграл

$$\int_{(S^{(l)})} \frac{\cos(r_{01}N_0)}{r_{01}^2} d\sigma$$

может быть не равен нулю лишь тогда, когда точка m_1 находится на ($S^{(l)}$); в этом случае он равен -2π , если нормаль N_0 направлена внутрь ($S^{(l)}$). Таким образом, имеем:

$$\int_{(S^{(l)})} \rho_n d\sigma = (-1) \int_{(S^{(l)})} \rho_{n-1} d\sigma = \dots = (-1)^n \int_{(S^{(l)})} f d\sigma.$$

Итак, если для одной из поверхностей ($S^{(l)}$), $l = 1, 2, \dots, k$,

$$\int_{(S^{(l)})} f d\sigma \neq 0,$$

то ρ_n не стремится к пределу; отсюда заключаем, что принцип Робэна здесь места не имеет.

Полученные формулы приводят к равенствам:

$$\int_{(S^{(l)})} (\rho_n + \rho_{n-1}) d\sigma = 0, \quad \int_{(S^{(l)})} \rho d\sigma = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, k).$$

Последнее из них может быть получено из уравнения (61), интегрируя которое по ($S^{(l)}$), находим:

$$\begin{aligned} \int_{(S^{(l)})} \rho d\sigma &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(S^{(l)})} \left(\int_{(S_1)} \rho(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \right) d\sigma = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \rho(1) \left(\int_{(S^{(l)})} \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma \right) d\sigma_1 = - \int_{(S_1^{(l)})} \rho(1) d\sigma_1. \end{aligned}$$

Ниже мы докажем, что $\rho = 0$ на ($S^{(l)}$).

Легко убедиться, что можно получить общее решение уравнения (61), умножая найденную функцию ρ на произвольную константу.

Повторяя рассуждения предыдущего параграфа, мы видим, что, если функции f' и f'' связаны условием (55), то соответствующие им функции ρ' и ρ'' — равны; в самом деле, функция $f' - f''$ удовлетворяет условию (39) и соответствующая ей функция $\rho' - \rho''$ равна нулю. Отсюда следует, что, задав

$$\int_{(S)} \rho \, d\sigma = M,$$

мы вполне этим определим функцию ρ ; для того чтобы указанным способом получить ее, достаточно положить: $f = \frac{M}{2S}$.

Пользуясь рассуждением, уже проведенным в § 12, мы можем убедиться, что уравнение (61) не имеет других решений, кроме полученных по изложенному методу.

В самом деле, если ρ — некоторое решение этого уравнения и мы положим $f = \frac{1}{2} \rho$, то получим:

$$\rho_n = \frac{1}{2} \rho, \quad \rho_n + \rho_{n-1} = \rho$$

и вновь придем к функции ρ .

Благодаря лемме § 9, мы замечаем, что потенциал

$$V = \int_{(S_1)} \frac{\rho(1) \, d\sigma_1}{r_{10}} \quad (62)$$

есть величина постоянная в области (D_l) ; итак мы нашли решение рассматриваемой электростатической задачи.

Интегрируя по поверхности $(S^{(l)})$, $l = 1, 2, \dots, k$, мы получаем.

$$\int_{(D_e^{(l)})} \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 d\tau = - \int_{(S^{(l)})} V \frac{dV_e}{dn} d\sigma = - C \int_{(S^{(l)})} \frac{dV_e}{dn} d\sigma = 0.$$

[Здесь $(D_e^{(l)})$ обозначает область, ограниченную $(S^{(l)})$].

Итак, V остается постоянным даже внутри $(D_e^{(l)})$. Отсюда следует, что V сохраняет то же самое постоянное значение внутри $(S^{(0)})$ и что на поверхности $(S^{(l)})$

$$\frac{dV_i}{dn} - \frac{dV_e}{dn} = 0 = -4\pi\rho, \quad \rho = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, k),$$

т. е. что ρ равно нулю на внутренних границах.

Переводя эти последние слова на язык электростатики, можем сказать, что все электричество расположено на внешней границе $(S^{(0)})$.

Установив это последнее свойство, видим, что функция ρ удовлетворяет уравнению:

$$\rho = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1^{(0)})} \rho(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1; \quad (61')$$

ρ — та же самая функция, которая была найдена в предыдущем параграфе и которая представляет собой решение задачи Робэна для поверхности $(S^{(0)})$.

§ 14. Фундаментальные функции полюса $\zeta = 1$ и задача Робэна для случая (Е)

В случае (Е) число $\zeta = -1$ не может быть полюсом функции μ . При выполнении условий (39')

$$\int_{(S^{(l)})} f d\sigma = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, k)$$

число $\zeta = 1$ также не полюс; следовательно, радиус сходимости ряда (9) больше единицы.

В этом случае, для некоторого τ меньшего единицы и при $n \geq N$

$$|\rho_n| < \tau^n, \quad \lim \rho_n = 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Для произвольной функции f радиус сходимости ряда

$$(1 - \zeta) \mu(0) = \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0)\zeta + (\rho_2 - \rho_1)\zeta^2 + \dots$$

больше единицы; итак,

$$|\rho_n - \rho_{n-1}| < \tau^n, \quad \text{если } n \geq N.$$

Рассуждения § 12 показывают, что

$$|\rho_m - \rho_n| < a\tau^n, \quad \text{если } n \geq N, \quad m > n,$$

т. е. что принцип Робэна, в данном случае, существует.

Из равенства

$$\rho_n(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \rho_{n-1}(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1, \quad (63)$$

переходя к пределу, выводим (61)

$$\rho = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \rho(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1$$

и тем самым убеждаемся, что ρ , если она не равна нулю, представляет собой одну из фундаментальных функций полюса $\zeta = 1$.

Интегрируя (63) по $(S^{(l)})$, мы получаем.

$$\begin{aligned} \int_{(S^{(l)})} \rho_n d\sigma &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(S^{(l)})} \left(\int_{(S_1)} \rho_{n-1}(1) \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \right) d\sigma = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \rho_{n-1}(1) \left(\int_{(S^{(l)})} \frac{\cos(r_{01} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma \right) d\sigma_1 = \int_{(S_1^{(l)})} \rho_{n-1}(1) d\sigma_1, \end{aligned}$$

так как интеграл

$$\int_{(S^{(l)})} \frac{\cos(r_{01} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma$$

не равен нулю лишь для точки m_1 , расположенной на $(S^{(l)})$, и равен 2π — в этом последнем случае.

Таким образом, мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \int_{(S^{(l)})} \rho_n d\sigma &= \int_{(S^{(l)})} \rho_{n-1} d\sigma = \dots = \int_{(S^{(l)})} f d\sigma, \\ \int_{(S^{(l)})} \rho d\sigma &= \int_{(S^{(l)})} f d\sigma, \quad (l = 1, 2, \dots, k). \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Мы видим, что ρ не равна нулю, если не выполнено одно из условий (39').

Равенство (64) показывает, что существует несколько фундаментальных функций; в самом деле, фундаментальная функция, соответствующая f_1 , для которой

$$\int_{(S^{(1)})} f_1 d\sigma \neq 0, \quad \int_{(S^{(2)})} f_1 d\sigma = 0,$$

отличается от фундаментальной функции, соответствующей f_2 , для которой

$$\int_{(S^{(1)})} f_2 d\sigma = 0, \quad \int_{(S^{(2)})} f_2 d\sigma \neq 0.$$

Введем k функций $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(k)}$, обладающих тем свойством, что $f^{(l)} = 0$, если m_0 не расположено на $(S^{(l)})$, и $f^{(l)} = \frac{1}{S^{(l)}}$, если m_0 находится на $(S^{(l)})$.

Образует отвечающие им фундаментальные функции.

$$\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \dots, \rho^{(l)}, \dots, \rho^{(k)}. \quad (65)$$

Функция $\rho^{(l)}$ удовлетворяет условиям

$$\left. \begin{aligned} \int_{(S^{(k)})} \rho^{(l)} d\sigma &= 0, \quad \text{если } l \neq k, \\ \int_{(S^{(l)})} \rho^{(l)} d\sigma &= \frac{1}{S^{(l)}} \int_{(S^{(l)})} d\sigma = 1. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Функции (65) линейно независимы. В самом деле, допустив существование таких постоянных C_1, C_2, \dots, C_k , что

$$C_1 \rho^{(1)} + C_2 \rho^{(2)} + \dots + C_l \rho^{(l)} + \dots + C_k \rho^{(k)} \equiv 0,$$

мы убедились бы, при помощи интегрирования последнего равенства по $(S^{(l)})$, что.

$$C_l = 0.$$

Любая фундаментальная функция ρ , получаемая указанным способом при помощи некоторой функции f , равна линейной функции от функций (65).

В самом деле, если

$$\int_{(S^{(l)})} f d\sigma = \alpha^{(l)} \quad (l = 1, 2, \dots, k), \quad (67)$$

то фундаментальная функция, соответствующая f , равна:

$$\rho = \alpha^{(1)} \rho^{(1)} + \alpha^{(2)} \rho^{(2)} + \dots + \alpha^{(k)} \rho^{(k)},$$

функции же

$$f' = f - \alpha^{(1)} f^{(1)} - \alpha^{(2)} f^{(2)} - \dots - \alpha^{(k)} f^{(k)}$$

отвечает функция

$$\rho - \alpha^{(1)} \rho^{(1)} - \alpha^{(2)} \rho^{(2)} - \dots - \alpha^{(k)} \rho^{(k)},$$

которая равна нулю, так как f' удовлетворяет k условиям (39').

Наконец, указанным способом может быть получено любое решение уравнения (61). Пусть ρ — это решение. Полагая $f = \rho$, находим

$$\rho_0 = \rho, \rho_1 = \rho, \dots, \rho_n = \rho, \dots, \lim \rho_n = \rho.$$

Из всего этого можно еще заключить, что решение уравнения (61) — вполне определено, если нам известны значения $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(k)}$ интегралов:

$$\int_{(S^{(l)})} \rho d\sigma \quad (l = 1, 2, \dots, k);$$

решение это равняется

$$\alpha^{(1)} \rho^{(1)} + \dots + \alpha^{(k)} \rho^{(k)}.$$

На основании леммы § 9, мы заключаем, что функция

$$V = \int_{(S_1)} \frac{\varphi(1) d\sigma_1}{r_{10}}$$

представляет собой, для рассматриваемого случая, решение задачи Робэна и что решение этой задачи вполне определяется заданием электрических зарядов на каждой из поверхностей $(S^{(l)})$, $l = 1, 2, \dots, k$.

§ 15. Исследование полюса $\zeta = -1$ для случая (J)

Возвратимся к изучению функции (17):

$$\mu(0) = \frac{\mathcal{D}_1(\zeta, 0)}{\mathcal{D}_1(\zeta)}$$

и выясним, при каких условиях число $\zeta = -1$ не принадлежит к числу полюсов этой функции. Мы знаем, что функция $\mathcal{D}_1(\zeta, 0)$ удовлетворяет уравнению (36):

$$\mathcal{D}_1(\zeta, 0) = -\frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S_1)} \mathcal{D}_1(\zeta, 1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + \mathcal{D}_1(\zeta) f(0).$$

Проинтегрируем (36) по каждой из внутренних поверхностей:

$$(S^{(1)}), \dots, (S^{(k)}).$$

Находим

$$\begin{aligned} \int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}_1(\zeta, 0) d\sigma &= \\ &= -\frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S^{(l)})} \left(\int_{(S_1)} \mathcal{D}_1(\zeta, 1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \right) d\sigma + \\ &+ \mathcal{D}_1(\zeta) \int_{(S^{(l)})} f(0) d\sigma = \frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S_1)} \mathcal{D}_1(\zeta, 1) \left(\int_{(S^{(l)})} \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma \right) d\sigma_1 + \\ &+ \mathcal{D}_1(\zeta) \int_{(S^{(l)})} f(0) d\sigma = -\zeta \int_{(S_1^{(l)})} \mathcal{D}_1(\zeta, 1) d\sigma_1 + \\ &+ \mathcal{D}_1(\zeta) \int_{(S^{(l)})} f(0) d\sigma. \end{aligned}$$

В самом деле, интеграл

$$\int_{(S^{(l)})} \frac{\cos(r_{01}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma$$

не равен нулю лишь тогда, когда точка m_1 находится на $(S^{(l)})$; в этом же случае, направляя нормаль к поверхности $(S^{(l)})$ внутрь области, ограниченной этой поверхностью, найдем, что величина рассматриваемого интеграла равна -2π . Из последнего равенства для функции $\mathcal{D}_1(\zeta, 0)$ следует, что

$$(1 + \zeta) \int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}_1(\zeta, 0) d\sigma = \mathcal{D}_1(\zeta) \int_{(S^{(l)})} f(0) d\sigma, \quad (l = 1, 2, \dots, k). \quad (68)$$

Подставляя в это уравнение -1 вместо ζ , получаем:

$$0 = \mathcal{D}_1(-1) \int_{(S^{(l)})} f(0) d\sigma, \quad (l = 1, 2, \dots, k).$$

Итак, число $\zeta = -1$ может не быть полюсом функции (17) лишь при выполнении k условий:

$$\int f(0) d\sigma = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, k). \quad (69)$$

В этом случае, равенства (68) имеют вид:

$$(1 + \zeta) \int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}_1(\zeta, 0) d\sigma = 0,$$

вследствие чего, при $\zeta \neq -1$:

$$\int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}_1(\zeta, 0) d\sigma = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, k). \quad (70)$$

Все эти интегралы — целые функции ζ , ввиду чего равенства (70) должны удовлетворяться и при $\zeta = -1$; таким образом, при наличии k условий (69), имеем:

$$\int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}_1(-1, 0) d\sigma = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, k). \quad (71)$$

Предположим теперь, что $\zeta = -1$ есть полюс функции (17). Деля обе части равенства (68) на $1 + \zeta$ и заменяя затем ζ

на -1 , получаем:

$$\int_{(\zeta^{(l)})} \mathcal{D}_1(-1, 0) d\sigma = \mathcal{D}'_1(-1) \int_{(\zeta^{(l)})} f d\sigma, \quad (l = 1, 2, \dots, k).$$

Отсюда следует, что, если $\zeta = -1$ полюс (17), то равенство

$$\int_{(\zeta^{(l)})} \mathcal{D}_1(-1, 0) d\sigma = 0$$

может иметь место лишь одновременно с условием

$$\int_{(\zeta^{(l)})} f d\sigma = 0.$$

Рассуждая как в § 9, мы легко докажем, что при выполнении условий (69) значение $\zeta = -1$ не может быть полюсом (17).

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма. Если функция ρ удовлетворяет уравнению

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \int_{(\zeta)} \rho(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1,$$

то потенциал

$$V = \int_{(\zeta)} \frac{\rho(1) d\sigma_1}{r_{10}}$$

остается постоянным в области (D_e) .

В самом деле, на каждой из границ $(S^{(0)}), \dots, (S^{(k)})$ мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i}{dn} - \frac{dV_e}{dn} &= 4\pi\rho = 2 \int_{(\zeta)} \rho(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}'} d\sigma_1 = \\ &= \frac{dV_i}{dn} + \frac{dV_e}{dn}, \end{aligned}$$

• откуда

$$\frac{dV_e}{dn} = 0,$$

и поэтому

$$\int_{(D_e)} \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 d\tau = 0.$$

Итак, в области (D_e) $V = \text{const.}$

Предположим теперь, что функция f удовлетворяет k условиям (69) и что $\zeta = -1$ есть полюс (17). Отсюда следует, что

$$\mathcal{D}_1(-1, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \mathcal{D}_1(-1, 1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1$$

и что справедливы равенства (71).

На основании леммы заключаем, что

$$V = \int_{(S_1)} \frac{\mathcal{D}_1(-1, 1)}{r_{10}} d\sigma_1$$

остается постоянным в (D_e) . Пусть $V = C^{(l)}$ — значение V в области, ограниченной $(S^{(l)})$. Вне $(S^{(0)})$ V равняется нулю, так как он равен нулю в бесконечно удаленной точке.

Введем функцию f_0 , удовлетворяющую условиям:

$$f_0 = \alpha^{(l)} \quad \text{на } (S^{(l)}), \quad (l = 1, 2, \dots, k),$$

где $\alpha^{(l)}$ — произвольные постоянные.

Имеем

$$\int_{(S^{(l)})} f_0 d\sigma = \alpha^{(l)} S^{(l)};$$

таким образом, условия (69) не выполнены и $\zeta = -1$ на-
верное полюс соответствующей функции:

$$\frac{\overline{\mathcal{D}_1(\zeta, 0)}}{\mathcal{D}_1(\zeta)}. \quad (72)$$

Но если $\zeta = -1$ один из корней $\overline{\mathcal{D}_1(\zeta)}$, то функция $\overline{\mathcal{D}_1(\zeta, 0)}$ удовлетворяет уравнению

$$\overline{\mathcal{D}_1(-1, 0)} = \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \overline{\mathcal{D}_1(-1, 1)} \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma,$$

откуда следует, что потенциал

$$V_0 = \int_{(S_1)} \frac{\overline{\mathcal{D}_1(-1, 1)}}{r_{10}} d\sigma_1$$

остается постоянным в (D_e) . Пусть $C_0^{(l)}$ значение V_0 в $(S^{(l)})$; вне $(S^{(l)})$ V_0 равен нулю.

Умножим $\overline{\mathcal{D}_1(-1, 0)}$ на V и проинтегрируем произведение по (S) ; мы получим:

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \overline{\mathcal{D}_1(-1, 0)} V d\sigma &= \sum_{l=1}^{l=k} C^{(l)} \int_{(S^{(l)})} \overline{\mathcal{D}_1(-1, 0)} d\sigma = \\ &= \sum_{l=1}^{l=k} C^{(l)} \alpha^{(l)} \overline{\mathcal{D}_1'(-1)} S^{(l)}, \end{aligned}$$

так как V_0 равен нулю на поверхности $(S^{(0)})$.

С другой стороны, пользуясь равенством (71), находим:

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \overline{\mathcal{D}_1(-1, 0)} V d\sigma &= \int_{(S)} \overline{\mathcal{D}_1(-1, 0)} \left(\int_{(S_1)} \frac{\mathcal{D}_1(-1, 1)}{r_{10}} d\sigma_1 \right) d\sigma = \\ &= \int_{(S_1)} \mathcal{D}_1(-1, 1) \left(\int_{(S)} \frac{\overline{\mathcal{D}_1(-1, 0)}}{r_{10}} d\sigma \right) d\sigma_1 = \\ &= \int_{(S_1)} \mathcal{D}_1(-1, 1) V_0(1) d\sigma_1 = \\ &= \sum_{l=1}^{l=k} C_0^{(l)} \int_{(S_1^{(l)})} \mathcal{D}_1(-1, 1) d\sigma_1 = 0. \end{aligned}$$

Из сопоставления двух последних результатов вытекает, что между константами $\alpha^{(l)}$ имеет место соотношение:

$$\sum_{l=1}^{l=k} C^{(l)} \alpha^{(l)} \overline{\mathcal{D}_1'(-1)} S^{(l)} = 0;$$

из этого соотношения заключаем, что

$$C^{(l)} = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, k).$$

Итак, V равен нулю во всей области (D_e) ; следовательно, функция $\mathcal{D}_1(-1, 0)$ также равна нулю. Мы приходим к противоречию, так как дробная функция (17) оказывается сократимой, что не согласуется со сделанным ранее предположением.

Таким образом, при наличии условий (69), число $\zeta = -1$ не может быть полюсом (17).

§ 16. Внешняя задача Неймана для случая (J)

Данная задача возможна лишь в том случае, когда для всех внутренних границ

$$\int_{(S^{(l)})} f d\sigma = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, k). \quad (69')$$

В самом деле, искомый потенциал — гармоническая функция внутри каждой из областей, ограниченных некоторой внутренней поверхностью; поэтому если

$$f = \frac{dV_e}{dn}, \quad \text{на } (S^{(l)}),$$

то должно иметь место равенство

$$\int_{(S^{(l)})} f d\sigma = \int_{(S^{(l)})} \frac{dV_e}{dn} d\sigma = 0.$$

Но при наличии условий (69') $\zeta = -1$ не полюс функции

$$V = V_1 + V_2\zeta + V_3\zeta^2 + \dots, \quad (73)$$

так как $\zeta = -1$ не полюс функции μ .

Если $\zeta = 1$ полюс функции (73), то это — полюс простой, таким образом, радиус сходимости ряда

$$(1 - \zeta)V = V_1 + (V_2 - V_1)\zeta + (V_3 - V_2)\zeta^2 + \dots \quad (74)$$

больше единицы. Поэтому, возможно вычислить значение V при $\zeta = -1$, подставляя в ряд (74) число -1 вместо ζ .

Функция

$$V = \frac{1}{2} \{ V_1 - (V_2 - V_1) + (V_3 - V_2) + \dots \}$$

есть решение внешней задачи Неймана.

К найденному решению можно добавить функцию α , обращающуюся в нуль вне внешней границы $(S^{(0)})$ и имеющую постоянные значения в областях, ограниченных внутренними поверхностями. В самом деле, мы можем добавить к μ решения однородного уравнения, что равносильно добавлению функции α указанного вида к потенциалу V ,

§ 17. Фундаментальные функции полюса $\zeta = -1$ для случая (J)

Если имеют место условия (69)

$$\int_{(S(l))} f dz = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, k),$$

то число $\zeta = -1$ не может быть полюсом функции (9)

$$\mu(0) = \rho_0(0) + \zeta \rho_1(0) + \zeta^2 \rho_2(0) + \dots$$

Таким образом, функция

$$\mu(0)(1 - \zeta) = \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0)\zeta + (\rho_2 - \rho_1)\zeta^2 + \dots + (\rho_n - \rho_{n-1})\zeta^n + \dots$$

не допускает ни полюса $\zeta = 1$, ни полюса $\zeta = -1$, и радиус сходимости последнего ряда больше единицы. Имеем при некотором τ меньшем единицы:

$$|\rho_n - \rho_{n-1}| < \tau^n, \quad \text{если } n \geq N,$$

из последнего неравенства вытекает неравенство

$$|\rho_m - \rho_n| < a\tau^n, \quad \text{если } n \geq N(m > n).$$

показывающее, что при выполнении условий (69) ρ_n стремится к пределу.

Предположим теперь, что f — функция произвольная. Функция $\mu(0)$ может допускать полюсы $\zeta = 1$ и $\zeta = -1$, но эти полюсы — простые; поэтому радиус сходимости ряда

$$(1 - \zeta^2)\mu(0) = \rho_0 + \zeta \rho_1 + \zeta^2(\rho_2 - \rho_0) + \zeta^3(\rho_3 - \rho_1) + \dots + \zeta^n(\rho_n - \rho_{n-2}) + \dots \quad (75)$$

также больше единицы. Итак, возможно найти такое число τ меньшее единицы, что

$$|\rho_n - \rho_{n-2}| < \tau^n, \quad \text{если } n \geq N. \quad (76)$$

Последнее неравенство показывает, что если m и n оба четные или оба нечетные и если $m > n$, то

$$|\rho_m - \rho_n| \leq |\rho_m - \rho_{m-2}| + |\rho_{m-2} - \rho_{m-4}| + \dots + |\rho_{n+2} - \rho_n| < \tau^m + \tau^{m-2} + \dots + \tau^{n+2} < a\tau^n;$$

последовательности

$$\rho_0, \rho_2, \rho_4, \dots, \rho_{2n}, \dots \quad (77')$$

$$\rho_1, \rho_3, \rho_5, \dots, \rho_{2n+1}, \dots \quad (77'')$$

стремятся к пределам; обозначим эти пределы через A и B .

При выполнении условий (69) ρ_n стремится к пределу; в этом случае $A = B$.

Имеем

$$\left. \begin{aligned} \rho_{2n} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \rho_{2n-1}(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\tau_1, \\ \rho_{2n-1} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \rho_{2n-2}(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\tau_1. \end{aligned} \right\} \quad (60')$$

Переходя к пределу, находим

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} B(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\tau_1, \\ B &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} A(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\tau_1, \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

и получаем, далее, посредством почленного вычитания

$$A - B = \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} [A(1) - B(1)] \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\tau_1. \quad (79)$$

Отсюда следует, что функции

$$\psi = A - B, \quad (80)$$

если она не равна тождественно нулю, принадлежит к числу фундаментальных функций полюса $\xi = -1$.

Но, интегрируя равенство (60') по $(S^{(l)})$, мы получим, как в § 13:

$$\int_{(S^{(l)})} \rho_n d\tau = - \int_{(S^{(l)})} \rho_{n-1} d\tau = \dots = (-1)^n \int_{(S^{(l)})} f d\tau,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \int_{(S^{(l)})} (\rho_{2n} - \rho_{2n-1}) d\tau &= 2 \int_{(S^{(l)})} f d\tau, \\ \int_{(S^{(l)})} (A - B) d\tau &= \int_{(S^{(l)})} \psi d\tau = 2 \int_{(S^{(l)})} f d\tau; \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

последнее равенство показывает, что ψ не равна нулю, если не выполнено одно из условий (69).

Введем k функций $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(k)}$, определяемых условиями:

если m_0 не находится на $(S^{(l)})$: $f^{(l)} = 0$,

если m_0 лежит на $(S^{(l)})$: $f^{(l)} = \frac{1}{2S^{(l)}}.$

Образуем отвечающие им функции

$$A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(k)}; \quad B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(k)}$$

и соответствующие фундаментальные функции:

$$\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \dots, \psi^{(k)}, \quad (82)$$

полагая

$$\psi^{(l)} = A^{(l)} - B^{(l)}.$$

Согласно (81), имеем

$$\int_{(S^{(l)})} \psi^{(l)} d\sigma = 0, \text{ если } \lambda \neq l, \quad \int_{(S^{(l)})} \psi^{(l)} d\sigma = 1, \quad \int_{(S^{(l)})} f^{(l)} d\sigma = \frac{1}{2}. \quad (83)$$

Фундаментальные функции (82) линейно независимы. В самом деле, на основании (83), мы заключаем, что тождество

$$C_1 \psi^{(1)} + C_2 \psi^{(2)} + \dots + C_k \psi^{(k)} \equiv 0,$$

где C_1, C_2, \dots, C_k — некоторые постоянные, возможно лишь в том случае, когда все C_l равны нулю.

Нетрудно проверить, что фундаментальная функция, соответствующая произвольной функции f , есть линейная функция от функций (82); она равна сумме

$$\alpha^{(1)} \psi^{(1)} + \alpha^{(2)} \psi^{(2)} + \dots + \alpha^{(k)} \psi^{(k)},$$

в которой

$$\int_{(S^{(l)})} f d\sigma = \frac{1}{2} \alpha^{(l)}.$$

В самом деле, если фундаментальная функция ψ соответствует f , то функция

$$f' = f - \alpha^{(1)} f^{(1)} - \dots - \alpha^{(k)} f^{(k)} \quad (84)$$

соответствует функции

$$\psi - \alpha^{(1)} \psi^{(1)} - \dots - \alpha^{(k)} \psi^{(k)}.$$

Но f' удовлетворяет условиям (69), таким образом, последняя функция тождественно равна нулю.

Возможно убедиться, что по изложенному способу мы можем получить все решения однородного уравнения для $\zeta = -1$. Если ψ — такое решение, то можно положить $f = \frac{1}{2} \psi$.

Приимая во внимание, что

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \psi(1) \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1,$$

имеем:

$$\rho_0 = \frac{1}{2} \psi, \quad \rho_1 = -\frac{1}{2} \psi, \quad \rho_2 = \frac{1}{2} \psi, \dots;$$

мы вновь придем этим способом к функции ψ .

Из предыдущих соображений заключаем, что функция ψ вполне определяется значениями интегралов

$$\int_{(S^{(l)})} \psi d\sigma \quad (l = 1, 2, \dots, k).$$

§ 18. Замечание о принадлежности решения задачи Неймана к классу $H(l, A, \lambda)$

Как мы видели, каждое решение задачи Неймана представляется потенциалом простого слоя $V[\mu]$, плотность μ которого находится как решение интегрального уравнения

$$\mu(0) = -\frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + \frac{f(0)}{2\pi}, \quad (85)$$

которое мы перепишем в виде

$$\mu(0) = -\frac{\zeta}{2\pi} \frac{dV[\mu]}{dn} + \frac{f(0)}{2\pi}. \quad (86)$$

При $\zeta = 1$ $V[\mu]$ решает внутреннюю задачу: $\frac{dV_i}{dn} = f$.

При $\zeta = -1$ $V[\mu]$ решает внешнюю задачу: $\frac{dV_e}{dn} = -f$.

Для определенности рассмотрим обыкновенный случай области и исследуем принадлежность решения задачи Неймана к классу $H(l, A, \lambda)$ в зависимости от принадлежности поверхности к классу $L_k(B, \lambda)$ и функции f к классу $H(l, A, \lambda)$ на (S) . В обыкновенном случае уравнение (2) для $\zeta = -1$ имеет единственное решение при любой непрерывной функции $f(0)$. В этом случае резольвента ядра $K_n(1, 0)$ ограничена в точке $\zeta = -1$ и поэтому имеем, обозначая через $R_n(1, 0)$ резольвенту

$$\begin{aligned} |\mu| &= |\Sigma_n(1) + \int_{(S)} R_n(1, 0) \Sigma_n(0) d\sigma_0| \leq \\ &\leq \max |\Sigma_n| \left(1 + \max \int_{(S)} |R_n(1, 0)| d\sigma_0 \right) \leq C \cdot \max |f|, \end{aligned}$$

так как очевидно, что $\max |\Sigma_n| < C_1 \cdot \max |f|$. Итак, имеем, обозначая через A какую-либо из верхних граней $|f|$

$$|\mu| < CA. \quad (87)$$

Если $\zeta = 1$, то уравнение (86) имеет решение лишь в том случае, когда f удовлетворяет условию

$$\int_{(S)} f d\sigma = 0. \quad (88)$$

При выполнении условия (88) уравнение (86) имеет множество решений, отличающихся друг от друга слагаемыми вида $c\rho$, где ρ — функция Робэна. Среди этих решений найдется удовлетворяющее условию (88). Покажем, что так выбранное решение уравнения (86) удовлетворяет неравенству (87). Действительно, из теории интегральных уравнений следует, что резольвента ядра $K_n(1, 0)$ в окрестности точки $\zeta = 1$ имеет представление

$$\frac{\rho(m_1)}{\zeta - 1} + B(\zeta; m_1, m_0),$$

где $B(\zeta; m_1, m_0)$ ограничена в окрестности точки $\zeta = 1$. Отсюда следует, что при выполнении условия (88)

$$\begin{aligned} \mu(\zeta; m_1) &= \Sigma_n(\zeta; m_1) + \zeta^n \int_{(S)} \left[\frac{\rho(m_1)}{\zeta - 1} + B(\zeta; m_1, m_0) \right] \times \\ &\times \Sigma_n(\zeta; m_0) d\sigma_0 = \Sigma_n(\zeta; m_1) + \zeta^n \int_{(S)} B(\zeta; m_1, m_0) \Sigma_n(\zeta; m_0) d\sigma_0, \end{aligned} \quad (89)$$

так как вместе с f условию (88) удовлетворяет и Σ_n . Отсюда находим, что $\mu(\zeta; m_1)$ удовлетворяет неравенству (87) для всех значений ζ , достаточно близких к $\zeta = 1$. Кроме того, интегрируя обе части уравнения (85) по (S_0) , найдем:

$$\int_{(S)} \mu(0) d\sigma_0 = \frac{1}{1 - \zeta} \int_{(S)} f d\sigma_0$$

и, следовательно, решение (89) для $\zeta \neq 1$ удовлетворяет условию (88), если f удовлетворяет таковому. Решение $\mu(\zeta; m_1)$, являясь аналитической функцией параметра ζ в окрестности точки $\zeta = 1$, удовлетворяет условию (88) и при $\zeta = 1$. В последующем будем одновременно исследовать случаи $\zeta = -1$ и $\zeta = 1$; в случае $\zeta = 1$ под μ понимается только что упомянутое решение и без оговорок предполагается, что f удовлетворяет условию (88).

Так выбранное решение μ уравнения (86) для $\zeta = 1$ порождает то из решений внутренней задачи, которое удовлетворяет условию

$$\int_{(\zeta)} \rho V d\sigma.$$

Именно об этом решении внутренней задачи и будет идти речь.

Лемма. Если $(S) \in \mathcal{L}_{k+1}(B, \lambda)$, $(k \geq 0)$, и $f \in H(l, A, \lambda)$ на (S) , $0 \leq l \leq k$, то $\mu \in H(l, cA, \lambda')$ на (S) .

Действительно, в силу (87) $|\mu| < cA$. Тогда в силу теоремы 2 § 21 (II) о правильной непрерывности нормальной производной потенциала простого слоя с ограниченной плотностью имеем:

$$\frac{dV[\mu]}{dn} \in H(0, c_1A, \lambda').$$

Так как $f \in H(l, A, \lambda)$, то $f \in H(0, A, \lambda)$ и в силу уравнения (86), которому удовлетворяет функция μ , имеем:

$$\mu \in H(0, C_2A, \lambda') \text{ на } (S).$$

Предположим, что $\mu \in H(l', c''A, \lambda'')$ на (S) , где $0 \leq l' \leq l-1$, $\lambda'' < \lambda$, и покажем, что $\mu \in H(l'+1, c'A, \lambda')$, $\lambda' < \lambda''$. Действительно, $l'+2 \leq l+1 \leq k+1$ и поэтому $(S) \in \mathcal{L}_{l'+1}$. Тогда в силу теоремы 4 § 21 (II) из $\mu \in H(l', c''A, \lambda'')$ следует

$$\frac{dV[\mu]}{dn} \in H(l'+1, c'_1A, \lambda'), \quad (\lambda' < \lambda''),$$

и в силу уравнения (86), так как $f \in H(l'+1, A, \lambda)$, имеем:

$$\mu \in H(l'+1, c'_2A, \lambda'). \quad (90)$$

Так как уже показано, что $\mu \in H(0, c_2A, \lambda')$, то из (90) следует, что $\mu \in H(1, cA, \lambda'), \dots, \mu \in H(l, cA, \lambda')$ и лемма доказана.

Замечание. Пусть $f \equiv 0$. Если при этом однородное уравнение имеет решение ρ , для которого $|\rho| < A_0$, то очевидно, имеем

$$\rho \in H(k, cA_0, \lambda').$$

Из доказанной леммы и теоремы 4 § 19 (II) следует, что $V[\mu] \in H(l+1, cA, \lambda')$, если $f \in H(l, A, \lambda)$, $(0 \leq l \leq k)$. Отсюда следует теорема:

Теорема 1. Если $(S) \in \mathcal{L}_{k+1}(B, \lambda)$ и $f \in H(l, A, \lambda)$ ($k \geq 0$, $0 \leq l \leq k$), то решение внутренней [внешней] задачи Неймана $\in H(l+1, cA, \lambda')$ в (D_i) [в (D_e)].

Замечание. Пусть ρ_1 есть то из решений уравнения (86) для $f \equiv 0$ и $\xi = 1$, для которого $V[\rho_1] = 1$ на (S) и в (D_i) . Пусть $\max \rho_1 = A_0$. Тогда, как мы отмечали, $\rho_1 \in H(k, cA_0, \lambda')$ и, следовательно, $V[\rho_1] \in H(k+1, c_1, \lambda')$. Это замечание будет использовано при исследовании решения внешней задачи Дирихле.

Из теоремы 1 следует аналогичная теорема для поверхностей и функций f из класса $C^{(k)}$.

Теорема 2. Если $(S) \in C^{(k+1)}(B)$, ($k \geq 1$), и $f \in C^{(l)}(A)$ ($0 \leq l \leq k$), то решение внутренней [внешней] задачи Неймана $\in C^{(l)}(cA)$ в (D_i) [в (D_e)].

Действительно, если $l \geq 1$, то $f \in H(l-1, cA, 1)$. Кроме того, $(S) \in \mathcal{L}_k(c_1B, 1)$ и по теореме 1 решение задачи Неймана $\in H(l, c_2A, \lambda)$, ($\lambda < 1$), и тем самым $\in C^{(l)}(c_2A)$. Если $l = 0$, т. е. f непрерывна, то и μ непрерывна и удовлетворяет неравенству (87). Тогда очевидны непрерывность решения задачи Неймана и выполнение неравенства

$$|V| < cA.$$

Этим теорема 2 доказана.

§ 19. О единственности решения задачи Неймана*

Мы будем рассматривать внутреннюю задачу в случаях обычном и (J) и внешнюю задачу в случаях обычном и (E). В этих случаях решение ищется в односвязной области. Не различая эти случаи, рассматриваемую область назовем (D) .

Теорема 1. Гармоническая внутри (D) функция равна постоянной (в случае внешней задачи — нулю), если ее нормальная производная равна нулю.

Обозначим через $T(\alpha, k, h)$ тело вращения, ограниченное поверхностью $z = k(x^2 + y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$, ($k > 0$, $\alpha > 0$) и плоскостью $z = h$. Точку $(0, 0, 0)$ назовем вершиной тела, а часть границы, лежащую в плоскости $z = h$, — основанием.

* В этом параграфе дано изложение совместной работы М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева (Доклады АН СССР, т. XVI, № 3, 1937 г.).

Будем говорить, что односвязная область (D) принадлежит классу A , если всякой точке m границы области можно привести в соответствие тело T' , конгруентное $T(\alpha, k, h)$, имеющее вершину в m и лежащее в $(D + S)$. Если числа α, k, h не зависят от выбора точки m , то будем говорить, что (D) принадлежит классу B .

Нетрудно убедиться, что области, ограниченные поверхностями Ляпунова, принадлежат к классу B . Действительно, выбрав точку m поверхности началом координат, а касательную плоскость плоскостью xu , будем иметь для части поверхности внутри сферы Ляпунова

$$|z| < b(x^2 + y^2)^{\frac{1+\lambda}{2}}.$$

Если выбрать $k > b$ и $\alpha < \lambda$, то боковая поверхность тела вращения вблизи вершины будет находиться в (D) . Остается выбрать h так, чтобы тело $T(\alpha, k, h)$ не выходило из сферы Ляпунова с центром в точке m .

Так как числа b, λ и радиус сферы Ляпунова не зависят от положения точки m , то и числа k, α, h можно выбрать независимо от m .

Теорема 1 является следствием следующей значительно более общей теоремы, доказательство которой мы проведем.

Теорема 2. Пусть U функция, гармоническая внутри (D) , отлична от постоянной и пусть в точке m_0 границы области функция U имеет единственное предельное значение U_0 , равное нижней границе ее значений в (D) .

Если в тело (D) можно вписать тело T' , конгруентное $T(\alpha, k, h)$ с вершиной в m_0 , то

$$\lim_{r_{10} \rightarrow 0} \frac{U(m_1) - U_0}{r_{10}} > 0, \quad (91)$$

где m_1 — точка оси тела $T(\alpha, k, h)$.

Доказательство. Обозначим через U_1 минимум функции U на основании тела $T(\alpha, k, h)$. Очевидно, что $U_1 > U_0$, так как в случае $U_1 = U_0$ следовало бы, что минимальное значение гармонической функции достигается внутри области (D) .

Допустим, что существует гармоническая функция W в $T(\alpha, k, h)$ такая, что на основании тела

$$W < U_1, \quad (92)$$

на боковой поверхности тела

$$W \leq U_0, \quad (93)$$

в вершине тела

$$W = U_0,$$

удовлетворяющая неравенству

$$\lim_{r_{10} \rightarrow 0} \frac{W(m_1) - W(m_0)}{r_{10}} > 0. \quad (94)$$

Тогда на основании принципа максимума для гармонических функций следовало бы, что

$$W \leq U \text{ в } T(\alpha, k, h)$$

и, значит,

$$\frac{U(m_1) - U_0}{r_{10}} \geq \frac{W(m_1) - W(m_0)}{r_{10}}. \quad (95)$$

Из (94) и (95) при $r_{10} \rightarrow 0$ следовало бы (91), и теорема 2 была бы доказана. Таким образом, остается доказать существование гармонической функции W , удовлетворяющей условиям (92), (93), (94) и равной U_0 в вершине тела.

Пусть α и k фиксированы. Позже зафиксируем и h . Положим

$$W = \gamma [r \cos \theta + r^{1+\beta} P_{1+\beta}(\cos \theta)] + U_0,$$

где γ и β — положительные постоянные; $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; θ — угол между радиусом-вектором точки (x, y, z) и осью z ; $P_{1+\beta}(t)$ — регулярное в точке $t=1$ и равное 1 при $t=1$ решение уравнения Лежандра порядка $1+\beta$:

$$\frac{d}{dt} \left[(1-t^2) \frac{dP}{dt} \right] + (1+\beta)(2+\beta)P(t) = 0.$$

Очевидно, что $W(m_0) = U_0$. Нетрудно убедиться, что W гармоническая функция. Кроме того, на оси тела $\cos \theta = 1$ и получаем:

$$\frac{W(m_1) - U_0}{r_{10}} = \gamma + r_{10}^\beta \rightarrow \gamma > 0,$$

т. е. выполнено (94).

Покажем, что при надлежащем выборе γ и β будут выполнены условия (92) и (93).

Действительно, ряд для $P_{1+\beta}(t)$ имеет вид:

$$P_{1+\beta}(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+3\beta+\beta^2}{2 \cdot 1^2} \times \\ \times \frac{2+3\beta+\beta^2-2}{2 \cdot 2^2} \dots \frac{2+3\beta+\beta^2-k(k-1)}{2 \cdot k^2} (t-1)^k$$

и, следовательно,

$$P_{1+\beta}(0) = 1 - \frac{2+3\beta+\beta^2}{2 \cdot 1^2} + \frac{2+3\beta+\beta^2}{2 \cdot 1^2} \cdot \frac{3\beta+\beta^2}{2 \cdot 2^2} + \\ + \frac{2+3\beta+\beta^2}{2 \cdot 1^2} \cdot \frac{3\beta+\beta^2}{2 \cdot 2^2} \left[\frac{4-3\beta-\beta^2}{2 \cdot 3^2} + \frac{4-3\beta-\beta^2}{2 \cdot 3^2} \cdot \frac{10-3\beta-\beta^2}{2 \cdot 4^2} + \dots + \right. \\ \left. + \frac{4-3\beta-\beta^2}{2 \cdot 3^2} \cdot \frac{10-3\beta-\beta^2}{2 \cdot 4^2} \dots \frac{m^2+3m-3\beta-\beta^2}{2(m+2)^2} + \dots \right].$$

Если $|\beta| < 1$, то ряд в квадратных скобках положителен и не превосходит единицы, так как при $m \geq 1$

$$0 < \frac{m^2+3m-3\beta-\beta^2}{2(m+2)^2} = \frac{m^2+4m+4}{2(m+2)^2} - \frac{m+4+3\beta+\beta^2}{2(m+2)^2} < \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$P_{1+\beta}(0) < -\frac{3\beta+\beta^2}{2} + \frac{(3\beta+\beta^2)(2+3\beta+\beta^2)}{8} = \\ = -\frac{3\beta+\beta^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{3\beta+\beta^2}{4} \right).$$

Выбор β подчиним двум условиям:

$$0 < \frac{3\beta+\beta^2}{2} < 1 \quad \text{и} \quad \beta < \alpha.$$

Из первого из них следует:

$$P_{1+\beta}(0) < 0.$$

Исследуем теперь поведение функции

$$r \cos \theta + r^{1+\beta} P_{1+\beta}(\cos \theta)$$

на боковой поверхности тела $T(\alpha, k, h)$.

Имеем

$$r \cos \theta = z = k(x^2 + y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}} = k(r \sin \theta)^{1+\alpha} = k r^{1+\alpha} \sin^{1+\alpha} \theta,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} r \cos \theta + r^{1+\beta} P_{1+\beta}(\cos \theta) &= k r^{1+\alpha} \sin^{1+\alpha} \theta + r^{1+\beta} P_{1+\beta}(\cos \theta) = \\ &= r^{1+\beta} [k r^{\alpha-\beta} \sin^{1+\alpha} \theta + P_{1+\beta}(\cos \theta)]. \end{aligned}$$

Если точка боковой поверхности приближается к вершине, то $r \rightarrow 0$ и $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, и поэтому квадратная скобка для всех θ из некоторого промежутка

$$\theta_0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \theta_0 > 0$$

остаётся отрицательной. Выберем h настолько малым, чтобы на боковой поверхности тела $T(\alpha, k, h)$ было $\theta > \theta_0$. Тогда на боковой поверхности тела $T(\alpha, k, h)$ при любом $\gamma > 0$ выполнено условие (93).

Так как $U_0 < U_1$, то выбором достаточно малого $\gamma > 0$ можно добиться выполнения неравенства (92). Таким образом, теорема 2 доказана. Из неё следует, что если в каждой точке границы области (D) существует нормальная производная функции гармонической внутри (D) и отличной от постоянной, то найдётся такая точка границы, где эта производная отлична от нуля. Этим доказана теорема 1.

ГЛАВА IV

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ

§ 1. Постановка задачи Дирихле

Задача А. *Найти функцию V , гармоническую внутри (D_i) и удовлетворяющую условию*

$$V_i = f \text{ на } (S), \quad (1)$$

где f — заданная функция, непрерывная и определенная на границе.

Так формулируется внутренняя задача Дирихле.

Найти функцию V , гармоническую внутри (D_e) и удовлетворяющую условию

$$V_e = f \text{ на } (S), \quad (2)$$

где f — заданная функция, непрерывная и определенная на границе.

Такова внешняя задача Дирихле.

Мы будем предполагать, что для области (D_i) имеет место обыкновенный случай, случай (J) или случай (E) и что она ограничена поверхностями, удовлетворяющими условиям Ляпунова.

В случае (J) внешняя задача эквивалентна внешней задаче, относящейся к обыкновенному случаю, и нескольким внутренним задачам того же случая. В случае (E) внутренняя задача Дирихле эквивалентна нескольким внутренним задачам, соответствующим обыкновенному случаю.

Нетрудно установить, что поставленная задача Дирихле не может иметь более одного решения. Действительно, если предположить, что существуют две функции U и V , гармонические внутри (D_i) и принимающие на (S) равные значения, то их разность $U - V$ является гармонической внутри (D_i)

и обращается в нуль на (S) . Как мы видели в § 8 (I), функция гармоническая внутри (D_i) достигает своих максимума и минимума лишь на границе области. Поэтому максимум и минимум разности $U - V$ равны нулю и, следовательно, $U - V \equiv 0$ в (D_i) , т. е. $U \equiv V$ в (D_i) , и таким образом единственность внутренней задачи Дирихле установлена.

Пусть функция V определена в (D_e) . Через $V(R)$ обозначим максимум модуля функции V на сфере радиуса R с центром в некоторой фиксированной точке пространства. Будем говорить, что V обращается в нуль на бесконечности, если $V(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$.

Если две функции U и V имеют внутри (D_e) непрерывные производные второго порядка, удовлетворяют в каждой внутренней точке уравнению Лапласа, обращаются в нуль на бесконечности и имеют равные значения на (S) , то из того же принципа максимума, очевидно, следует, что U и V совпадают в (D_e) . Как будет видно из последующего, решение внешней задачи Дирихле всегда существует и представляется либо одним потенциалом двойного слоя, либо суммой потенциалов двойного и простого слоев. Но эти потенциалы обладают тем свойством, что произведения их на первую степень, а произведения их первых производных на вторую степень R остаются ограниченными, если $R \rightarrow \infty$.

Поэтому всякая функция v , удовлетворяющая уравнению Лапласа в каждой внутренней точке (D_e) и обращающаяся в нуль на бесконечности, обладает тем свойством, что произведения

$$Rv, \quad R^2 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad R^2 \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R^2 \frac{\partial v}{\partial z}$$

остаются ограниченными при $R \rightarrow \infty$.

В самом деле, пусть (D'_e) есть часть области (D_e) , лежащая вне сферы Σ_R настолько большого радиуса R , что Σ_R содержит внутри всю границу области (D_e) . Пусть U есть решение внешней задачи Дирихле для (D'_e) , принимающее на (S) значение v . Тогда v и U совпадают в (D'_e) и, следовательно, в (D'_e) v есть сумма потенциалов простого и двойного слоев, распространенных на (S) . Этим доказано ранее утверждение о поведении v и ее первых производных при $R \rightarrow \infty$. Этим доказано утверждение, высказанное в подстрочном примечании на стр. 39.

§ 2. Замена задачи А другой задачей

Вместо задачи А мы будем рассматривать следующую задачу:

Задача В. Найти потенциал двойного слоя, распространенного по (S), удовлетворяющий условию (1) для внутренней задачи и условию (2) — для внешней задачи.

Мы увидим, что задачи А и В — не равносильны: в некоторых случаях задача В даже не имеет решения. Однако исследование задачи В приведет нас к полному решению задачи А.

Заменим теперь задачу В более общей задачей С.

Задача С. Найти потенциал двойного слоя W , удовлетворяющий уравнению

$$W_i - W_e = 2\zeta \bar{W} + 2f \quad \text{на } (S). \quad (C)$$

Черта над буквой указывает всегда, что значение соответствующей функции взято для точки, лежащей на (S).

W — функция ζ ; нетрудно видеть, что значение W при $\zeta = 1$ есть решение внешней задачи В, а ее значение при $\zeta = -1$ есть решение внутренней задачи В.

В самом деле, обращаясь к формулам § 3 (II), имеем:

$$W_i - W_e = 4\pi \times \text{плотность } W, \quad W_i + W_e = 2\bar{W}. \quad (3)$$

С помощью этих формул находим из уравнения (C) при $\zeta = 1$:

$$W_i - W_e = W_i + W_e + 2f, \quad W_e = -f.$$

При $\zeta = -1$ получаем из того же уравнения

$$W_i - W_e = -W_i - W_e + 2f, \quad W_i = f.$$

Наше утверждение доказано.

Обозначим плотность потенциала W через $\frac{1}{2\pi} \vartheta$ или, что то же, положим:

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \vartheta(1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1. \quad (4)$$

Из первого равенства (3) имеем:

$$W_i - W_e = 4\pi \frac{\vartheta(0)}{2\pi} = 2\vartheta.$$

Подставляя в (С), находим, после некоторых упрощений:

$$\vartheta(0) = \frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S_1)} \vartheta(1) \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + f(0). \quad (5)$$

Таким образом, задача нами сведена к исследованию интегрального уравнения (5).

§ 3. Формальное решение задачи С

Будем искать решение задачи С в виде ряда, полагая

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_1\zeta + \vartheta_2\zeta^2 + \dots \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ζ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_0 &= f, \\ \vartheta_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \vartheta_0(1) \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1, \\ &\dots \dots \dots, \\ \vartheta_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \vartheta_{n-1}(1) \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Предполагая, что ряд (6) сходится равномерно на (S) для некоторых значений ζ , находим, подставляя его в правую часть (4):

$$W = W_1 + W_2\zeta + W_3\zeta^2 + \dots + W_n\zeta^{n-1} + \dots \quad (8)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \vartheta_0(1) \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1, \\ &\dots \dots \dots, \\ W_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \vartheta_{n-1}(1) \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Возможно преобразовать равенства (9) к другому виду, позволяющему последовательно вычислять, не пользуясь функциями (7), потенциалы W_k .

Подставляя (8) в уравнение (С), получаем:

$$\begin{aligned}(W_1)_i - (W_1)_e &= 2f, \\ (W_2)_i - (W_2)_e &= 2\bar{W}_1, \\ &\dots \dots \dots, \\ (W_n)_i - (W_n)_e &= 2\bar{W}_{n-1}, \\ &\dots \dots \dots.\end{aligned}$$

Из этих равенств находим, при помощи первой из формул (3):

$$\begin{aligned}2f &= 4\pi \frac{\vartheta_0(0)}{2\pi}, \quad 2\bar{W}_1 = 4\pi \frac{\vartheta_1(0)}{2\pi}, \quad \dots, \quad 2\bar{W}_{n-1} = \\ &= 4\pi \frac{\vartheta_{n-1}(0)}{2\pi}, \quad \dots\end{aligned}$$

Наконец, отсюда имеем:

$$f = \vartheta_0(0), \quad \bar{W}_1 = \vartheta_1(0), \quad \dots, \quad \bar{W}_{n-1} = \vartheta_{n-1}(0), \quad \dots \quad (10)$$

Формулы (10) показывают, что равенства (9) могут быть заменены следующими:

$$\left. \begin{aligned}W_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} f(1) \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1, \\ W_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \bar{W}_1 \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1, \\ &\dots \dots \dots \\ W_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \bar{W}_{n-1} \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1, \\ &\dots \dots \dots\end{aligned} \right\} \quad (9')$$

эти последние, очевидно, обладают указанными выше свойствами. Потенциалы (9') называются потенциалами Неймана.

Отсюда видно, что решение задачи В сводится к исследованию вопроса: сходится ли ряд (8) при $\zeta = 1$ и при $\zeta = -1$?

§ 4. Фактическое решение задачи С

Ядро уравнения (5) равно

$$\bar{K}(1, 0) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2}. \quad (11)$$

При решении задачи Неймана мы изучали уравнение

$$\mu(0) = -\frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + f(0) \quad (12)$$

с ядром

$$K(1, 0) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2}. \quad (13)$$

$K(1, 0)$ и $\bar{K}(1, 0)$ — сопряженные ядра; в самом деле, переставляя в (13) указатели (1) и (0), находим:

$$K(0, 1) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos(r_{01}N_1)}{r_{01}^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} = \bar{K}(1, 0).$$

Отсюда вытекает, что любое итерированное ядро $\bar{K}_n(1, 0)$ может быть получено посредством перестановки указателей (1) и (0) из отвечающего ему ядра $K_n(0, 1)$.

Так, например,

$$\begin{aligned} \bar{K}_2(1, 0) &= -\int_{(S_2)} \bar{K}(1, 2) \bar{K}(2, 0) d\sigma_2 = \\ &= \int_{(S_1)} K(2, 1) K(0, 2) d\sigma_2 = \int_{(S_2)} K(0, 2) K(2, 1) \times \\ &\quad \times d\sigma_2 = K_2(0, 1) \end{aligned}$$

и т. д.

Обращаясь к теореме § 4 (III), мы видим, что для n , удовлетворяющего неравенству

$$2 - n\lambda < 0,$$

ядро $\bar{K}_n(1, 0) = K_n(0, 1)$ ограничено.

Вследствие этого, написав уравнение (5) в виде

$$\eta(0) = \zeta \int_{(S_1)} K(0, 1) \eta(1) d\sigma_1 + f(0), \quad (5')$$

мы можем свести определение $\vartheta(0)$ к отысканию решений уравнения

$$\vartheta(0) = \zeta^n \int_{(S_1)} K_n(0, 1) \vartheta(1) d\sigma_1 + C_n(0), \quad (14)$$

в котором $C_n(0)$ равно сумме n первых членов ряда (6); аналогично этому, в § 5 (III) решение уравнения (12) было сведено к решению уравнения

$$\mu(0) = \zeta^n \int_{(S_1)} K_n(1, 0) \mu(1) d\sigma_1 + \sum_n(0). \quad (14')$$

У сопряженных уравнений (14) и (14') имеется введенная в § 5 (III) общая резольвента

$$\frac{\mathcal{D}(\zeta, 1, 0)}{\mathcal{D}(\zeta)}; \quad (15)$$

в указанном параграфе мы получили:

$$\mu(0) = \sum_n(0) + \zeta^n \int_{(S_1)} \sum_n(1) \frac{\mathcal{D}(\zeta, 1, 0)}{\mathcal{D}(\zeta)} d\sigma_1 = \frac{\mathcal{D}_1(\zeta, 0)}{\mathcal{D}_1(\zeta)}. \quad (16)$$

В рассматриваемом теперь случае находим:

$$\vartheta(0) = C_n(0) + \zeta^n \int_{(S_1)} C_n(1) \frac{\mathcal{D}(\zeta, 0, 1)}{\mathcal{D}(\zeta)} d\sigma_1 = \frac{\mathcal{D}_2(\zeta, 0)}{\mathcal{D}_2(\zeta)}. \quad (17)$$

Полученное решение приводит к решению задачи В лишь в том случае, когда мероморфная функция (17) не допускает полюсов $\zeta = 1$ и $\zeta = -1$. Определим же, при каких условиях функция (17) обладает этим свойством.

В предыдущей главе, исследуя функцию (16), мы показали:

- (α) что функция (16) не допускает комплексных полюсов;
- (β) что у нее нет полюсов между -1 и $+1$;
- (γ) и что в том случае, когда $\zeta = 1$ и $\zeta = -1$ ее полюсы, эти полюсы — простые.

Наше исследование сильно бы упростилось, если можно было показать, что функция (17) также обладает этими свойствами. Мы это установим, если сможем утверждать:

- (α) что дробь (15) не допускает комплексных полюсов, модули которых меньше единицы;

(β) что дробь (15) не допускает других полюсов с модулем, равным единице, кроме $\zeta = 1$ и $\zeta = -1$;

(γ) что числа $\zeta = 1$ и $\zeta = -1$ могут быть только простыми полюсами дроби (15).

В самом деле, для исследования данной задачи не представляют никакого интереса полюсы дроби (17), модули которых больше единицы.

Знаменатель дроби (17) получается сокращением знаменателя дроби (15); поэтому, если предложения (α)(β)(γ) имеют место для дроби (15), то они остаются верными и для дроби (17).

З а м е ч а н и е. Возможно было бы установить все эти свойства и даже более общие свойства дроби (17) при помощи метода § 7 (III), однако в этом случае пришлось бы пользоваться нормальными производными потенциалов двойного слоя. Существование этих производных возможно лишь при наличии некоторых дополнительных условий; поэтому нам пришлось бы предварительно выяснить, удовлетворяются ли для потенциала W эти условия.

§ 5. Некоторые замечания об ядре $K_n(1, 0)$

В дальнейшем, при изучении ядра $K_n(1, 0)$ мы будем все время предполагать, что число n — нечетное. Мы сделаем три замечания:

1°. Если точка m_1 лежит на (S) , то во всех случаях [обыкновенном случае, случаях (J) и (E)]

$$\int_{(S)} K_n(1, 0) d\sigma = 1. \quad (18)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_{(S)} K_n(1, 0) d\sigma &= \int_{(S)} \left(\int_{(S_2)} K_{n-1}(1, 2) K(2, 0) d\sigma_2 \right) d\sigma = \\ &= \int_{(S_2)} K_{n-1}(1, 2) \left(\int_{(S)} K(2, 0) d\sigma \right) d\sigma_2. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \int_{(S)} K(2, 0) d\sigma &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \frac{\cos(r_{20} N_0)}{r_{20}^2} d\sigma = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \frac{\cos(r_{02} N_0)}{r_{20}^2} d\sigma = 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для точки m_1 , лежащей на (S) ,

$$\int_{(S)} K_n(1, 0) d\sigma = \int_{(S_2)} K_{n-1}(1, 2) d\sigma_2 = \int_{(S)} K_{n-1}(1, 0) d\sigma$$

и что

$$\int_{(S)} K_n(1, 0) d\sigma = \int_{(S)} K_{n-1}(1, 0) d\sigma = \dots = \int_{(S)} K(1, 0) d\sigma = 1.$$

2°. В случае (E) для точки m_1 , расположенной на (S) , имеем:

$$\left. \begin{aligned} \int_{(S^{(l)})} K_n(1, 0) d\sigma &= 1, \text{ если } m_1 \text{ лежит на } (S^{(l)}); \\ \int_{(S^{(l)})} K_n(1, 0) d\sigma &= 0, \text{ если } m_1 \text{ не лежит на } (S^{(l)}). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

В самом деле, в этом случае

$$\begin{aligned} \int_{(S^{(l)})} K_n(1, 0) d\sigma &= \int_{(S_2)} K_{n-1}(1, 2) \left(\int_{(S^{(l)})} K(2, 0) d\sigma \right) d\sigma_2 = \\ &= \int_{(S_2^{(l)})} K_{n-1}(1, 2) d\sigma_2, \end{aligned}$$

так как потенциал двойного слоя

$$\int_{(S^{(l)})} K(2, 0) d\sigma \quad (20)$$

равен нулю, если точка m_2 не находится на $(S^{(l)})$, и равен единице, если m_2 лежит на $(S^{(l)})$.

Отсюда следует, что

$$\int_{(S^{(l)})} K_n(1, 0) d\sigma = \int_{(S^{(l)})} K_{n-1}(1, 0) d\sigma = \dots = \int_{(S^{(l)})} K(1, 0) d\sigma.$$

Последний интеграл равен нулю, если m_1 не находится на $(S^{(l)})$; в противном случае он равен единице.

3°. В случае (J) имеем для точки m_1 , лежащей на (S) :

$$\left. \begin{aligned} \int_{(S^{(l)})} K_n(1, 0) d\sigma &= (-1)^n, \text{ если } m_1 \text{ лежит на } (S^{(l)}); \\ \int_{(S^{(l)})} K_n(1, 0) d\sigma &= 0, \text{ если } m_1 \text{ не лежит на } (S^{(l)}). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$[(S^{(l)})$ — внутренняя граница].

В самом деле, в этом случае

$$\begin{aligned} \int_{(S^{(l)})} K_n(1, 0) d\sigma &= \int_{(S_2)} K_{n-1}(1, 2) \left(\int_{(S^{(l)})} K(2, 0) d\sigma \right) d\sigma_2 = \\ &= (-1) \int_{(S_2^{(l)})} K_{n-1}(1, 2) d\sigma_2, \end{aligned}$$

так как здесь потенциал (20) равен нулю, когда m_2 не лежит на $(S^{(l)})$, и равен -1 , если m_2 находится на $(S^{(l)})$ и нормаль направлена внутрь $(S^{(l)})$.

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \int_{(S^{(l)})} K_n(1, 0) d\sigma &= (-1) \int_{(S^{(l)})} K_{n-1}(1, 0) d\sigma = \\ &= \dots = (-1)^{n-1} \int_{(S^{(l)})} K(1, 0) d\sigma. \end{aligned}$$

Последний интеграл равняется нулю, если m_1 не находится на $(S^{(l)})$; для точки, лежащей на $(S^{(l)})$, его значение равно -1 .

§ 6. Доказательство предложений § 4

В § 3 (III), решая уравнение (12), мы получили ряд:

$$\mu(0) = \rho_0(0) + \zeta \rho_1(0) + \zeta^2 \rho_2(0) + \dots + \zeta^n \rho_n(0) + \dots,$$

в котором

$$\left. \begin{aligned} \rho_0(0) &= f(0), \\ &\dots \dots \dots, \\ \rho_n(0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(\dot{S}_1)} \rho_{n-1}(1) \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Пользуясь свойствами итерированных ядер, мы можем написать последнее равенство (22) в виде:

$$\rho_n(0) = \int_{(S_1)} K_n(1, 0) f(1) d\sigma_1. \quad (22')$$

Мы установили в предыдущей главе несколько теорем относительно ρ_n , которые нам пригодятся в последующем изложении. В частности, мы доказали, что в обыкновенном случае и в случае (E) ρ_n стремится к пределу; предел этот равен нулю, если

$$\int_{(S)} f(0) d\sigma = 0 \text{ для обыкновенного случая}$$

и если

$$\int_{(S^{(l)})} f(0) d\sigma = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, k) \text{ для случая (E).}$$

В случае (J), ρ_{2k} стремится к пределу A ; ρ_{2k-1} имеет пределом число B , вообще говоря, не равное A . $A \neq B$ равно нулю, если

$$\int_{(S)} f(0) d\sigma = 0;$$

$A - B$ равняется нулю, если

$$\int_{(S^{(l)})} f(0) d\sigma = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, k).$$

ρ_n — во всех случаях ограничено.

Переходим к доказательству теорем, касающихся резольвенты (15)

$$\frac{\mathcal{D}(\zeta, 1, 0)}{\mathcal{D}(\zeta)}.$$

Резольвента $F(\zeta, 1, 0)$ уравнения

$$\varphi(0) = \zeta \int_{(S_1)} L(1, 0) \varphi(1) d\sigma_1 + f(0)$$

удовлетворяет уравнению

$$F(\zeta, 1, 0) = \zeta \int_{(S_2)} L(2, 0) F(\zeta, 1, 2) d\sigma_2 + L(1, 0);$$

отсюда видим, что функция (15) удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{D}(\zeta, 1, 0) = \zeta^n \int_{(S_2)} K_n(2, 0) \mathcal{D}(\zeta, 1, 2) d\sigma_2 + \mathcal{D}(\zeta) K_n(1, 0); \quad (21)$$

будем предполагать, что дробь (15) несократима. Пусть ζ_0 — полюс этой дроби; в таком случае

$$\mathcal{D}(\zeta_0, 1, 0) = \zeta_0^n \int_{(S_2)} K_n(2, 0) \mathcal{D}(\zeta_0, 1, 2) d\sigma_2. \quad (24)$$

Итерируя, получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\zeta_0, 1, 0) &= \zeta_0^n \int_{(S_2)} K_n(2, 0) \left(\zeta_0^n \int_{(S_1)} K_n(3, 2) \mathcal{D}(\zeta_0, 1, 3) d\sigma_3 \right) d\sigma_2 = \\ &= \zeta_0^{2n} \int_{(S_1)} \mathcal{D}(\zeta_0, 1, 3) \left(\int_{(S_2)} K_n(3, 2) K_n(2, 0) d\sigma_2 \right) d\sigma_3 = \\ &= \zeta_0^{2n} \int_{(S_1)} K_{2n}(3, 0) \mathcal{D}(\zeta_0, 1, 3) d\sigma_3. \end{aligned}$$

Продолжая эти операции, находим:

$$\mathcal{D}(\zeta_0, 1, 0) = \zeta_0^{ns} \int_{(S_s)} K_{ns}(2, 0) \mathcal{D}(\zeta_0, 1, 2) d\sigma_2. \quad (24')$$

Полагая в (22)

$$\rho_0 = f = \mathcal{D}(\zeta_0, 1, 0)$$

и принимая во внимание (22'), получаем:

$$\rho_{ns} = \int_{(S_s)} K_{ns}(2, 0) \mathcal{D}(\zeta_0, 1, 2) d\sigma_2;$$

это равенство дает нам возможность привести (24') к следующему виду:

$$\mathcal{D}(\zeta_0, 1, 0) = \zeta_0^{ns} \rho_{ns}(0). \quad (25)$$

Предполагая, что

$$|\zeta_0| < 1,$$

находим из (25), при безграничном возрастании s , переходя к пределу

$$\mathcal{D}(\zeta_0, 1, 0) = 0, \quad (26)$$

что противоречит сделанному выше предположению о несократимости дроби (15).

Если ζ_0 не вещественное, а комплексное число с модулем, равным единице, то всегда возможно найти такое нечетное число n , чтобы ζ_0^n не было равно 1. В таком случае, при безграничном возрастании s , правая часть (25) не может стремиться к пределу, отличному от нуля. В обыкновенном случае, случае (E) и случае (J), при нечетном s , $\rho_{ns}(J)$ стремится к пределу, а ζ_0^n предела не имеет. Если предел $\rho_{ns}(0)$ ноль, то имеет место равенство (26), что приводит к противоречию.

Полагая, для обыкновенного случая или случая (E), $\zeta = -1$, получаем:

$$\mathcal{D}(-1, 1, 0) = (-1)^n \rho_n(0). \quad (25')$$

В этом случае существует предел $\rho_{ns}(0)$ при безграничном возрастании s , и, следовательно, предел этот должен равняться нулю; мы вновь приходим к невозможному равенству

$$\mathcal{D}(-1, 1, 0) = 0.$$

Предположения $\zeta_0 = 1$ и для случая (J) $\zeta_0 = -1$ не приводят к нелепости.

Покажем теперь, что полюса $\zeta = 1$ и $\zeta = -1$ не могут быть крайними.

Дифференцируя равенство (23) по ζ , получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'(\zeta, 1, 0) = n \zeta^{n-1} \int_{(S_2)} K_n(2, 0) \mathcal{D}(\zeta, 1, 2) d\tau_2 + \\ + \zeta^n \int_{(S_2)} K_n(2, 0) \mathcal{D}'(\zeta, 1, 2) d\tau_2 + \mathcal{D}'(\zeta) K_n(1, 0). \end{aligned} \quad (27)$$

Предполагая, что $\zeta = 1$ — крайний полюс, имеем $\mathcal{D}'(1) = 0$; из равенства (27) находим:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'(1, 1, 0) = n \int_{(S_2)} K_n(2, 0) \mathcal{D}(1, 1, 2) d\tau_2 + \\ + \int_{(S_2)} K_n(2, 0) \mathcal{D}'(1, 1, 2) d\tau_2. \end{aligned} \quad (28)$$

Предположим, что нами рассматривается обыкновенный случай или случай (J). Интегрируя (28) по всей границе (S),

получаем:

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \mathcal{D}'(1, 1, 0) d\sigma &= n \int_{(S)} \left(\int_{(S_2)} K_n(2, 0) \mathcal{D}(1, 1, 2) d\sigma_2 \right) d\sigma + \\ &+ \int_{(S)} \left(\int_{(S_2)} K_n(2, 0) \mathcal{D}'(1, 1, 2) d\sigma_2 \right) d\sigma, \end{aligned}$$

откуда, пользуясь замечаниями предыдущего параграфа, находим:

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \mathcal{D}'(1, 1, 0) d\sigma &= n \int_{(S)} \mathcal{D}(1, 1, 2) \left(\int_{(S)} K_n(2, 0) d\sigma \right) d\sigma_2 + \\ &+ \int_{(S)} \mathcal{D}'(1, 1, 2) \left(\int_{(S)} K_n(2, 0) d\sigma \right) d\sigma_2 = \\ &= n \int_{(S_2)} \mathcal{D}(1, 1, 2) d\sigma_2 + \int_{(S_2)} \mathcal{D}'(1, 1, 2) d\sigma_2. \end{aligned} \quad (25)$$

Последнее равенство показывает, что

$$\int_{(S)} \mathcal{D}(1, 1, 0) d\sigma = 0. \quad (30)$$

Если мы теперь положим в (22)

$$\rho_0 = f = \mathcal{D}(1, 1, 0),$$

то найдем, на основании (30), для обыкновенного случая, что $\lim \rho_n = 0$. Равенство (25), в рассматриваемом случае, напишется:

$$\mathcal{D}(1, 1, 0) = \rho_n(0);$$

отсюда находим:

$$\mathcal{D}(1, 1, 0) = 0,$$

что нас приводит к противоречию.

В случае (J) имеем:

$$A + B = 0,$$

где

$$A = \lim \rho_n, \quad B = \lim \rho_{n+1};$$

отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(1, 1, 0) &= A, \quad \mathcal{D}(1, 1, 0) = B, \quad 2\mathcal{D}(1, 1, 0) = 0, \\ \mathcal{D}(1, 1, 0) &= 0;\end{aligned}$$

мы вновь пришли к невозможному результату.

Предположим теперь, что мы рассматриваем случай (E). Проинтегрируем равенство (28) по поверхностям $(S^{(l)})$, $l = 1, 2, \dots, k$. Равенство (29) здесь заменяется следующими равенствами:

$$\begin{aligned}\int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}'(1, 1, 0) d\sigma &= n \int_{(S_2)} \mathcal{D}(1, 1, 2) \left(\int_{(S^{(l)})} K_n(2, 0) d\sigma \right) d\sigma_2 + \\ &+ \int_{(S_2)} \mathcal{D}'(1, 1, 2) \left(\int_{(S^{(l)})} K_n(2, 0) d\sigma \right) d\sigma_2 = \\ &= \int_{(S_2^{(l)})} \mathcal{D}(1, 1, 2) d\sigma_2 + \int_{(S_2^{(l)})} \mathcal{D}'(1, 1, 2) d\sigma_2 \quad (29') \\ &(l = 1, 2, \dots, k).\end{aligned}$$

[В самом деле: интегралы от ядра K_n отличны от нуля лишь для точек m_2 , лежащих на $(S^{(l)})$]. Игак, имеют место равенства:

$$\int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}(1, 1, 0) d\sigma = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, k); \quad (30')$$

но эти равенства показывают, что если

$$\rho_0 = f = \mathcal{D}(1, 1, 0),$$

то

$$\lim \rho_{ns} = 0, \quad \mathcal{D}(1, 1, 0) = 0,$$

т. е. мы вновь получили противоречивый результат. Таким образом, предположение о кратности полюса $\zeta = 1$ приводит во всех случаях к противоречию: точка $\zeta = 1$ может быть только простым полюсом.

Предположим теперь, что нами рассматривается случай (J) и что $\zeta = 1$ кратный полюс.

Принимая во внимание нечетность n , находим из (27) следующее равенство, соответствующее здесь (28):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'(-1, 1, 0) &= n \int_{(S_2)} K_n(2, 0) \mathcal{D}(-1, 1, 2) d\tau_2 - \\ &- \int_{(S_1)} K_n(2, 0) \mathcal{D}'(-1, 1, 2) d\tau_2. \quad (28') \end{aligned}$$

Интегрируя его по внутренним границам $(S^{(l)})$ $l = 1, 2, \dots, k$ и вспоминая, что интеграл от функции $K_n(2, 0)$ равен нулю для всех точек m_2 , не лежащих на $(S^{(l)})$, и что он равен $(-1)^n = -1$ для точек, расположенных на $(S^{(l)})$, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}'(-1, 1, 0) d\tau &= -n \int_{(S_2^{(l)})} \mathcal{D}(-1, 1, 2) d\tau_2 + \\ &+ \int_{(S_2^{(l)})} \mathcal{D}'(-1, 1, 2) d\tau_2, \quad (l = 1, 2, \dots, k); \quad (29'') \end{aligned}$$

отсюда

$$\int_{(S_2^{(l)})} \mathcal{D}(-1, 1, 2) d\tau_2 = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, k). \quad (30'')$$

При наличии равенств (30'') имеем:

$$\lim_{n \rightarrow 2t} \rho_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow 2t+1} \rho_n = B, \quad A - B = 0,$$

если $\rho_0 = \mathcal{D}(-1, 1, 0)$.

Но равенство (25) здесь имеет вид

$$\mathcal{D}(-1, 1, 0) = (-1)^n \rho_n;$$

сопоставляя его с написанными выше выражениями пределов A , B , получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(-1, 1, 0) &= A, \quad \mathcal{D}(-1, 1, 0) = -B, \\ 2\mathcal{D}(-1, 1, 0) &= 0, \quad \mathcal{D}(-1, 1, 0) = 0, \end{aligned}$$

т. е. приходим к невозможному результату. Итак, $\infty = -1$ есть простой полюс.

§ 7. Две леммы, относящиеся к уравнению с ядром $K_n(1, 0)$

Лемма 1. При наличии обыкновенного случая или случая (J), уравнение

$$P(0) = \int_{(S)} K_n(1, 0) P(1) d\tau_1 + F(0) \quad (31)$$

имеет решение, если

$$\int_{(S)} F(0) d\tau = 0. \quad (32)$$

Уравнению

$$P(0) = \zeta^n \int_{(S_1)} K_n(1, 0) P(1) d\tau_1 + F(0) \quad (33)$$

удовлетворяет функция

$$P(0) = F(0) + \zeta^n \int_{(S_1)} F(1) \frac{\mathcal{D}(\zeta, 1, 0)}{\mathcal{D}(\zeta)} d\tau_1 = \frac{\mathcal{D}_3(\zeta, 0)}{\mathcal{D}_3(\zeta)}, \quad (34)$$

так как функция (15) — резольвента уравнения (33).

Мы будем предполагать, что дробь во второй части (34) несократима. Для доказательства леммы достаточно показать, что $\zeta = 1$ не полюс дроби (34).

Интегрируя по (S) тождество

$$\mathcal{D}_3(\zeta, 0) = \zeta^n \int_{(S_1)} K_n(1, 0) \mathcal{D}_3(\zeta, 1) d\tau_1 + \mathcal{D}_3(\zeta) F(0) \quad (33')$$

и пользуясь условием (32), находим.

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \mathcal{D}_3(\zeta, 0) d\tau &= \zeta^n \int_{(S)} \left(\int_{(S_1)} K_n(1, 0) \mathcal{D}_3(\zeta, 1) d\tau_1 \right) d\tau = \\ &= \zeta^n \int_{(S_1)} \mathcal{D}_3(\zeta, 1) \left(\int_{(S)} K_n(1, 0) d\tau \right) d\tau_1 = \\ &= \zeta^n \int_{(S_1)} \mathcal{D}_3(\zeta, 1) d\tau_1, \end{aligned}$$

откуда

$$(1 - \zeta^n) \int_{(S)} \mathcal{D}_3(\zeta, 0) d\sigma = 0,$$

и при $\zeta^n \neq 1$

$$\int_{(S)} \mathcal{D}_3(\zeta, 0) d\sigma = 0.$$

Но последний интеграл — целая функция ζ , поэтому последнее равенство сохраняет силу и при $\zeta = 1$.

Таким образом,

$$\int_{(S)} \mathcal{D}_3(1, 0) d\sigma = 0. \quad (35)$$

Положим теперь в (22)

$$\rho_0 = f = \mathcal{D}_3(1, 0).$$

Из равенства

$$\mathcal{D}_3(1, 0) = \int_{(S_1)} K_n(1, 0) \mathcal{D}_3(1, 1) d\sigma_1,$$

имеющего место, когда $\zeta = 1$ полюс дроби (34), выводим, как в предыдущем параграфе:

$$\mathcal{D}_3(1, 0) = \rho_n = \rho_{ns}; \quad (36)$$

принимая во внимание условие (35), заключаем, что

$$\mathcal{D}_3(1, 0) = 0.$$

Последнее равенство невозможно, если дробь (34) несократима. Итак, $\zeta = 1$ не может быть полюсом дроби (34).

Лемма 1 bis. Уравнение (31) для случая (E) допускает решение при выполнении k условий

$$\int_{(S^{(l)})} F(0) d\sigma = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, k). \quad (32')$$

Интегрируя по $(S^{(l)})$ тождество (33'), получаем:

$$\int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}_3(\zeta, 0) d\sigma = \zeta^n \int_{(S_1^{(l)})} \mathcal{D}_3(\zeta, 1) d\sigma_1, \quad (l = 1, 2, \dots, k),$$

так как входящий здесь в вычисления интеграл от функции $K_n(1, 0)$ не равен нулю лишь для точек m_1 , лежащих на $(S^{(l)})$.

Отсюда выводим, что

$$\int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}_3(\zeta, 0) d\sigma = 0, \quad \text{если } \zeta^n \neq 1, \quad (l = 1, 2, \dots, k),$$

и что

$$\int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}_3(1, 0) d\sigma = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, k).$$

Но при наличии этих k условий мы заключаем, полагая $\zeta = 1$ полюсом (34):

$$\mathcal{D}_3(1, 0) = \lim p_{ns} = 0, \quad \text{если } p_0 = \mathcal{D}_3(1, 0),$$

что невозможно.

Лемма 2. Уравнение

$$P(0) = - \int_{(S_1)} K_n(1, 0) P(1) d\sigma_1 + F(0) \quad (31')$$

допускает решение для случая (J), если

$$\int_{(S^{(l)})} F(0) d\sigma = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, k). \quad (32')$$

Мы докажем, что при выполнении условий (32') число $\zeta = -1$ не может быть полюсом функции (34).

Интегрируя по $(S^{(l)})$ тождество (33'), получаем:

$$\begin{aligned} \int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}_3(\zeta, 0) d\sigma &= \zeta^n \int_{(S_1)} \mathcal{D}_3(\zeta, 1) \left(\int_{(S^{(l)})} K_n(1, 0) d\sigma \right) d\sigma_1 = \\ &= -\zeta^n \int_{(S_1^{(l)})} \mathcal{D}_3(\zeta, 1) d\sigma_1; \end{aligned}$$

интеграл в скобках равен нулю, если m_1 не лежит на $(S^{(l)})$; для точек m_1 , находящихся на $(S^{(l)})$, он равен $(-1)^n = -1$.

Из равенства

$$(1 + \zeta^n) \int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}_3(\zeta, 0) d\sigma = 0$$

закключаем, что

$$\int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}_3(\zeta, 0) d\tau = 0, \text{ если } \zeta^n = -1, (l=1, 2, \dots, k); \quad (35')$$

принимая во внимание, что этот интеграл — целая функция, находим:

$$\int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}_3(-1, 0) d\tau = 0, \quad (l=1, 2, \dots, k).$$

Если $\zeta = -1$ полюс дроби (34), то

$$\mathcal{D}_3(-1, 0) = (-1)^n \int_{(S_1)} K_n(1, 0) \mathcal{D}_3(-1, 1) d\tau_1.$$

Полагая в (22)

$$\rho_0 = f = \mathcal{D}_3(-1, 0),$$

получаем:

$$\mathcal{D}_3(-1, 0) = (-1)^{ns} \rho_{ns}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{D}_3(-1, 0) = \lim \rho_{n, 2t} = A,$$

$$\mathcal{D}_3(-1, 0) = \lim (-\rho_{n, 2t+1}) = -B;$$

имея в виду, что, на основании условий (35'), $A - B = 0$, находим:

$$\mathcal{D}_3(-1, 0) = 0,$$

что невозможно.

Принимая во внимание, что $\zeta = -1$ не полюс дроби (34), мы можем найти $P(0)$, заменяя в формуле (34) ζ на -1 .

§ 8. Две леммы о потенциале двойного слоя

Лемма 1. Если функция точек $\bar{W}(0)$, определенная на (S) , удовлетворяет уравнению

$$\bar{W}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} \bar{W}(1) d\tau_1, \quad (37)$$

то $\bar{W}(0) = \text{const}$ на (S) ; в случаях обыкновенном и (J), $\bar{W}(0)$ имеет одно и то же значение на всех границах;

в случае (E), $\bar{W}(0)$ имеет различные значения $C^{(i)}$ на каждой границе $(S_i^{(t)})$.

Написав уравнение (37) в виде

$$\bar{W}(0) = \int_{(S_1)} K(0, 1) \bar{W}(1) d\sigma_1$$

и применяя способ итерации, мы получаем:

$$\begin{aligned} \bar{W}(0) &= \int_{(S_1)} K(0, 1) \bar{W}(1) d\sigma_1 = \int_{(S_1)} K_2(0, 1) \bar{W}(1) d\sigma_1 = \\ &= \dots = \int_{(S_1)} K_n(0, 1) \bar{W}(1) d\sigma_1. \end{aligned} \quad (37')$$

Рассмотрим, прежде всего, случай (J) и обыкновенный случай. Возьмем на (S) две какие-нибудь точки m_2 и m_3 ;

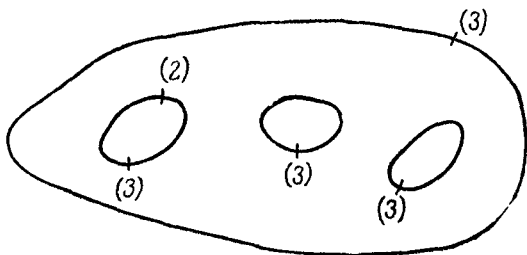


Рис. 26.

при этом m_3 не должно обязательно быть расположено на той же границе, что m_2 (рис. 26).

Положим

$$F(0) = K_n(3, 0) - K_n(2, 0).$$

Согласно замечаниям § 5,

$$\int_{(S)} F(0) d\sigma = \int_{(S)} K_n(3, 0) d\sigma - \int_{(S)} K_n(2, 0) d\sigma = 1 - 1 = 0;$$

таким образом, на основании леммы 1 предыдущего параграфа, уравнение

$$P(0) = \int_{(S_1)} K_n(1, 0) P(1) d\tau_1 + K_n(3, 0) - K_n(2, 0) \quad (38)$$

имеет решение в обыкновенном случае и в случае (J).

Записав (37') в виде

$$\bar{W}(1) = \int_{(S)} K_n(1, 0) \bar{W}(0) d\tau,$$

умножим $\bar{W}(1)$ на $P(1)$ и проинтегрируем произведение по (S) ; пользуясь (38), получим:

$$\begin{aligned} \int_{(S_1)} \bar{W}(1) P(1) d\tau_1 &= \int_{(S_1)} P(1) \left(\int_{(S)} K_n(1, 0) \bar{W}(0) d\tau \right) d\tau_1 = \\ &= \int_{(S)} \bar{W}(0) \left(\int_{(S_1)} K_n(1, 0) P(1) d\tau_1 \right) d\tau = \\ &= \int_{(S)} \bar{W}(0) \{P(0) - K_n(3, 0) + K_n(2, 0)\} d\tau = \\ &= \int_{(S)} \bar{W}(0) P(0) d\tau - \int_{(S)} K_n(3, 0) \bar{W}(0) d\tau + \int_{(S)} K_n(2, 0) \bar{W}(0) d\tau; \end{aligned}$$

отсюда следует, что

$$\int_{(S)} K_n(3, 0) \bar{W}(0) d\tau = \int_{(S)} K_n(2, 0) \bar{W}(0) d\tau$$

и что

$$\bar{W}(3) = \bar{W}(2), \quad (39)$$

г. е. что значение $\bar{W}(0)$ в произвольной точке m_3 равно значению $\bar{W}(0)$ в m_2 или что

$$\bar{W}(0) = C$$

Заметим, что благодаря свойствам интеграла Гаусса константа действительно является решением (37).

Изучим теперь случай (E). Возьмем на одной и той же поверхности $(S^{(l)})$ точки m_2 и m_3 (рис. 27) и образуем

функцию

$$F(0) = K_n(3, 0) - K_n(2, 0).$$

Имеем для каждой из границ $(S^{(l)})$:

$$\int_{(S^{(l)})} F(0) d\sigma = \int_{(S^{(l)})} K_n(3, 0) d\sigma - \int_{(S^{(l)})} K_n(2, 0) d\sigma = 0,$$

так как оба интеграла равны нулю, если $l \neq i$, и оба равны единице, когда $l = i$.

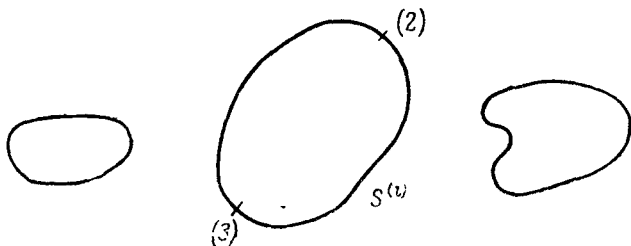


Рис. 27.

Итак, уравнение (38) имеет решение, и мы констатируем, что и здесь справедливо равенство (39); таким образом, на $(S^{(i)})$:

$$\bar{W}(0) = C^{(i)}.$$

На основании свойств интеграла Гаусса, при наличии равенства

$$\bar{W}(0) = C^{(l)} \quad \text{на} \quad (S^{(l)}) \quad (l = 1, 2, \dots, k),$$

имеем для точки m_1 , лежащей на $(S^{(i)})$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} \bar{W}(1) d\sigma_1 = \sum_{l=1}^{l=k} \frac{C^{(l)}}{2\pi} \int_{(S_1^{(l)})} \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 = C^{(i)},$$

так как в последней сумме один лишь интеграл, взятый по $(S^{(i)})$, отличен от нуля и равен единице. Таким образом, мы действительно нашли решение уравнения (37) для случая (E).

Лемма 2. В случае (J), функция $\bar{W}(0)$, удовлетворяющая уравнению

$$\bar{W}(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} \bar{W}(1) d\tau_1, \quad (40)$$

имеет постоянное значение на каждой границе; она равна нулю на внешней границе ($S^{(0)}$), и ее значение может изменяться при переходе от одной внутренней границы к другой.

Представляя уравнение (40) в виде

$$\bar{W}(0) = - \int_{(S_1)} K(0, 1) \bar{W}(1) d\tau_1$$

и применяя к нему процесс итерации, получаем:

$$\begin{aligned} \bar{W}(0) &= - \int_{(S_1)} K(0, 1) \bar{W}(1) d\tau_1 = (-1)^2 \int_{(S_1)} K_2(0, 1) \bar{W}(1) d\tau_1 = \\ &= \dots = (-1)^n \int_{(S_1)} K_n(0, 1) \bar{W}(1) d\tau_1. \end{aligned} \quad (40')$$

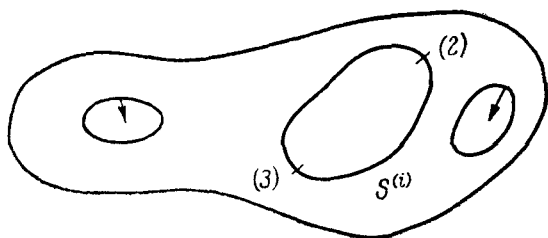


Рис. 28.

Пусть m_2 и m_3 (рис. 28) — две точки внутренней границы ($S^{(l)}$); рассмотрим функцию

$$F(0) = K_n(3, 0) - K_n(2, 0).$$

Для каждой из внутренних границ ($S^{(l)}$) имеем:

$$\begin{aligned} \int_{(S^{(l)})} F(0) d\tau &= \int_{(S^{(l)})} K_n(3, 0) d\tau - \int_{(S^{(l)})} K_n(2, 0) d\tau = 0 \\ &\quad (l = 1, 2, \dots, k), \end{aligned}$$

так как интегралы во второй части последнего равенства оба равны нулю, если $l \neq i$, и оба равны $(-1)^n$, если $l = i$.

Отсюда следует, что уравнение

$$P(0) = - \int_{(S_1)} K_n(1, 0) P(1) d\tau_1 + K_n(3, 0) - K_n(2, 0) \quad (41)$$

имеет решение при нечетном n . Представляя (40') в виде

$$\bar{W}(1) = - \int_{(S)} K_n(1, 0) \bar{W}(0) d\tau,$$

умножая его на $P(1)$, интегрируя полученное произведение по всей границе (S) и принимая во внимание уравнение (41), получаем:

$$\begin{aligned} \int_{(S_1)} \bar{W}(1) P(1) d\tau_1 &= - \int_{(S)} \bar{W}(0) \left(\int_{(S_1)} K_n(1, 0) P(1) d\tau_1 \right) d\tau = \\ &= - \int_{(S)} \bar{W}(0) P(0) d\tau - \int_{(S)} K_n(3, 0) \bar{W}(0) d\tau + \\ &\quad + \int_{(S)} K_n(2, 0) \bar{W}(0) d\tau, \end{aligned}$$

откуда вытекает, что

$$\int_{(S)} K_n(3, 0) \bar{W}(0) d\tau = \int_{(S)} K_n(2, 0) \bar{W}(0) d\tau$$

и что

$$\bar{W}(3) = \bar{W}(2).$$

Итак, $\bar{W}(0)$ имеет постоянное значение

$$\bar{W}(0) = C^{(i)}$$

на границе $(S^{(i)})$.

Это нам дает для некоторой точки m_0 , лежащей на $(S^{(0)})$,

$$\begin{aligned} \bar{W}(0) &= - \frac{1}{2\pi} \int_{(S^{(0)})} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} \bar{W}(1) d\tau_1 + \\ &+ \sum_{l=1}^{l=k} C^{(l)} \int_{(S^{(l)})} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\tau_1 = - \frac{1}{2\pi} \int_{(S^{(0)})} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} \bar{W}(1) d\tau_1. \end{aligned}$$

Но уравнение

$$\bar{W}(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S^{(0)})} \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} \bar{W}(1) d\sigma_1$$

допускает на $(S^{(0)})$ для обыкновенного случая единственное решение:

$$\bar{W}(0) = 0;$$

$\zeta = -1$ не может в обыкновенном случае быть характеристическим числом.

Обратно, если $\bar{W}(0)$ равен $C^{(l)}$ на границе $(S^{(l)})$, $l=1, 2, \dots, k$, и — нулю на $(S^{(0)})$, то нетрудно показать, что $\bar{W}(0)$ есть решение уравнения (40). В самом деле, мы имеем для точки m_0 , находящейся на $(S^{(i)})$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{(N_1)} \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} \bar{W}(1) d\sigma_1 = \sum_{l=1}^{l=k} \frac{C^{(l)}}{2\pi} \int_{(S_1^{(l)})} \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 = -C^{(i)},$$

так как для этой точки один только взятый по $(S^{(i)})$ интеграл отличен от нуля: этот интеграл равен -2π , когда нормаль к $(S^{(i)})$ направлена внутрь $(S^{(i)})$.

§ 9. Следствия из лемм § 8

Благодаря этим леммам мы нашли все фундаментальные функции уравнения (5), соответствующие числам $\zeta = -1$ и $\zeta = 1$.

В обыкновенном случае и в случае (J) существует только одна независимая фундаментальная функция, отвечающая полюсу $\zeta = 1$; наиболее общая фундаментальная функция равна C .

В случае (E) имеется k линейно независимых функций, соответствующих числу $\zeta = 1$; можно предположить, что они подчинены следующим условиям:

$$\varphi^{(l)} = \alpha^{(l)} \quad \text{на} \quad (S^{(l)}), \quad \varphi^{(l)} = 0 \quad \text{на} \quad (S^{(i)}) \\ (i \neq l: \quad l = 1, 2, \dots, k).$$

В случае (J) числу $\zeta = -1$ соответствуют k фундаментальных функций, которые можно выбрать так, чтобы имели

место условия:

$$\varphi^{(l)} = \alpha^{(l)} \quad \text{на } (S^{(l)}), \quad \varphi^{(l)} = 0 \quad \text{на } (S^{(k)}) \\ (i \neq l; l = 1, 2, \dots, k).$$

Этим объясняются результаты, полученные в предыдущей главе. Мы знаем, что интегральное уравнение (12)

$$\mu(0) = -\frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S_1)} \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^3} \mu(1) d\sigma_1 + f(0),$$

в котором ζ — характеристическое число, имеет решение лишь при наличии условия

$$\int_{(S)} f(0) \varphi(0) d\sigma = 0;$$

здесь $\varphi(0)$ — соответствующее числу ζ общее решение однородного уравнения, сопряженного с (12).

Отсюда следует, что для обыкновенного случая и случая (J), при $\zeta = 1$, должно выполняться условие

$$\int_{(S)} f(0) C d\sigma = 0 \quad \text{или} \quad \int_{(S)} f(0) d\sigma = 0;$$

в случае же (E) должно выполняться условие

$$\int_{(S)} f(0) \varphi(0) d\sigma = \int_{(S^{(l)})} f(0) C^{(l)} d\sigma = 0$$

или

$$\int_{(S^{(l)})} f(0) d\sigma = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, k);$$

наконец в случае (J) должно быть выполнено условие того же вида при $\zeta = -1$.

§ 10. Решение внутренней задачи Дирихле для случая (E) и для обыкновенного случая

Соображения § 6 показывают, что мы можем найти решение внутренней задачи Дирихле для случая (E) и для обыкновенного случая. Число $\zeta = -1$ не полюс функции $\vartheta(0)$ и, следовательно, не полюс ряда (8)

$$W = W_1 + \zeta W_2 + \zeta^2 W_3 + \dots,$$

в котором

$$W_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} f \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1,$$

$$W_n = \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \bar{W}_{n-1} \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1.$$

Радиус сходимости ряда (S) может равняться единице так как число $\zeta = 1$ может быть полюсом функции $\vartheta(0)$ если это число полюс, то полюс простой. Радиус сходимости ряда

$$(1 - \zeta) W = W_1 + \zeta(W_2 - W_1) + \\ + \zeta^2(W_3 - W_2) + \dots + \zeta^n(W_{n+1} - W_n) + \dots$$

больше единицы. Подставляя -1 вместо ζ , мы получим функцию

$$W = \frac{1}{2} [W_1 - (W_2 - W_1) + (W_3 - W_2) - \dots],$$

которая, согласно замечаниям § 2, удовлетворяет условию

$$W_i = f \quad \text{на } (S).$$

§ 11. Исследование полюса $\zeta = 1$ для случая (E) и для обыкновенного случая

Мы здесь будем говорить исключительно о случае (E) так как обыкновенный случай может рассматриваться как частный — тот, когда $k = 1$. В § 4 мы нашли, что функции (17)

$$\vartheta(0) = \frac{\mathcal{D}_2(\zeta, 0)}{\mathcal{D}_2(\zeta)}$$

есть решение уравнения (5)

$$\vartheta(0) = \frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S_1)} \vartheta(1) \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + f(0).$$

Определим теперь, при каких условиях число $\zeta = 1$ не может быть полюсом этой функции.

Уравнение (12)

$$\mu(0) = -\frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + f(0),$$

сопряженное с уравнением (5), допускает $\zeta = 1$ в качестве характеристического числа. Таким образом, уравнение (5) может лишь в том случае иметь решение при $\zeta = 1$, когда

$$\int_{(S)} f(0) \varphi(0) d\sigma = 0.$$

Здесь $\varphi(0)$ — одна из фундаментальных функций уравнения (12), соответствующих числу $\zeta = 1$.

В § 14 (III) мы нашли все фундаментальные функции уравнения (12), отвечающие числу $\zeta = 1$; число линейно независимых функций этого рода равно k . Если обозначить одну из них через $\rho^{(\lambda)}$, то для нее можно записать следующие условия:

$$\begin{aligned} \int_{(S^{(l)})} \rho^{(l)} d\sigma &= 0 \quad (l \neq \lambda); & \int_{(S^{(\lambda)})} \rho^{(l)} d\sigma &= 1; \\ \rho^{(l)} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \rho^{(\lambda)}(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1. \end{aligned}$$

В обыкновенном случае существует единственная фундаментальная функция, обозначенная нами буквой ρ .

Таким образом, k равенств

$$\int_{(S)} f\rho^{(l)} d\sigma = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, k) \quad (42)$$

представляют собой необходимые и достаточные условия существования решения уравнения (5) при $\zeta = 1$.

Возможно убедиться непосредственно, не пользуясь цитированными выше теоремами из теории интегральных уравнений, что функция (17) не имеет — при наличии условий (42) — полюса $\zeta = 1$.

Подставляя (17) в уравнение (5), имеем:

$$\mathcal{D}_2(\zeta, 0) = \frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S_1)} \mathcal{D}_2(\zeta, 1) \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + \mathcal{D}_2(\zeta) f(0). \quad (43)$$

Допустим, что условия (42) выполняются; умножая обе части (43) на $\rho^{(\lambda)}$ и интегрируя полученное произведение по

всей границе (S) , находим:

$$\begin{aligned}
 & \int_{(S)} \mathcal{D}_2(\zeta, 0) \rho^{(\lambda)}(0) d\sigma = \\
 &= \frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S)} \rho^{(\lambda)}(0) \left(\int_{(S_1)} \mathcal{D}_2(\zeta, 1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \right) d\sigma + \mathcal{D}_2(\zeta) \times \\
 & \times \int_{(S)} f(0) \rho^{(\lambda)} d\sigma = \frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S)} \mathcal{D}_2(\zeta, 1) \left(\int_{(S)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} \rho^{(\lambda)} d\sigma \right) d\sigma_1 = \\
 &= -\frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S_1)} \mathcal{D}_2(\zeta, 1) \left(\int_{(S)} \frac{\cos(r_{01} N_1)}{r_{10}^2} \rho^{(\lambda)} d\sigma \right) d\sigma_1 = \\
 & \qquad \qquad \qquad = \zeta \int_{(S)} \mathcal{D}_2(\zeta, 1) \rho^{(\lambda)}(1) d\sigma_1;
 \end{aligned}$$

отсюда следует, что

$$(1 - \zeta) \int_{(S)} \mathcal{D}_2(\zeta, 0) \rho^{(\lambda)} d\sigma = 0.$$

Таким образом, при $\zeta \neq 1$

$$\int_{(S)} \mathcal{D}_2(\zeta, 0) \rho^{(\lambda)} d\sigma = 0;$$

имея в виду, что интеграл в левой части последнего равенства — целая функция ζ , заключаем, что это равенство имеет место и при $\zeta = 1$, т. е. что

$$\int_{(S)} \mathcal{D}_2(1, 0) \rho^{(\lambda)}(0) d\sigma = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k). \quad (44)$$

Пусть $\zeta = 1$ — полюс функции (17); заменяя в (43) ζ на 1 получаем:

$$\mathcal{D}_2(1, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \mathcal{D}_2(1, 1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1. \quad (45)$$

Принимая во внимание лемму 1 § 8, выводим из равенства (45), что

$$\mathcal{D}_2(1, 0) = C^{(l)} \quad (l = 1, 2, \dots, k)$$

на поверхности $(S^{(l)})$.

Подставляя это значение $\mathcal{D}_2(1, 0)$ в (44), имеем:

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \mathcal{D}_2(1, 0) \rho^{(\lambda)}(0) d\sigma &= \sum_{l=1}^{l=k} \int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}_2(1, 0) \rho^{(\lambda)} d\sigma = \\ &= \sum_{l=1}^{l=k} C^{(l)} \int_{(S^{(l)})} \rho^{(\lambda)}(0) d\sigma = C^{(l)} = 0, \\ &(\lambda = 1, 2, \dots, k), \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $\mathcal{D}_2(1, 0)$ тождественно равна нулю и что дробь (17), в противоречии со сделанным предположением, сократима; нам приходится придти к заключению, что $\zeta = 1$ не может быть полюсом функции (17).

При наличии условий (42) мы можем получить теперь решение внешней задачи Дирихле. В этом случае функция W не допускает полюса $\zeta = 1$, радиус ряда (8) больше единицы; функция

$$W = W_1 + W_2 + \dots \quad (46)$$

есть решение задачи Дирихле; она такова, что

$$W_e = -f.$$

Однако условия (42) не имеют никакой непосредственной связи с задачей А.

§ 12. Истолкование условий (42)

Мы решили внешнюю задачу Дирихле, подчинив значения функции на границе совершенно чуждым этой задаче условиям. В данном параграфе мы покажем, что условия (44) необходимы для разрешимости задачи (B_e).

Теорема. Для всякого потенциала двойного слоя

$$W = \int_{(\dot{S}_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1$$

и для любой фундаментальной функции $\rho^{(\lambda)}$ имеем:

$$\int_{(S)} W_e \rho^{(\lambda)} d\sigma = 0.$$

Предполагая теорему доказанной, видим, что решение задачи (B_e) оказывается невозможным, если не выполнены условия (42).

Для доказательства теоремы заметим, прежде всего, что

$$W_e = \left(\int_{(S_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \right)_e = \int_{(S_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 - 2\pi \mu(0),$$

откуда тотчас же выводим:

$$\begin{aligned} \int_{(S)} W_e \rho^{(\lambda)} d\sigma &= \int_{(S)} \rho^{(\lambda)} \left(\int_{(\dot{S}_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \right) d\sigma - \\ &- 2\pi \int_{(S)} \mu(0) \rho^{(\lambda)} d\sigma = \int_{(S_1)} \mu(1) \left(\int_{(\dot{S})} \rho^{(\lambda)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma \right) d\sigma_1 - \\ &- 2\pi \int_{(S)} \mu(0) \rho^{(\lambda)} d\sigma = \int_{(\dot{S}_1)} \mu(1) \left(- \int_{(\dot{S})} \rho^{(\lambda)} \frac{\cos(r_{01} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma \right) d\sigma_1 - \\ &- 2\pi \int_{(S)} \mu(0) \rho^{(\lambda)} d\sigma = 2\pi \int_{(S_1)} \mu(1) \rho^{(\lambda)}(1) d\sigma_1 - \\ &- 2\pi \int_{(S)} \mu(0) \rho^{(\lambda)}(0) d\sigma = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

§ 13. Решение внешней задачи для случая (E)

Воспользуемся результатами § 11; пусть α — функция точек на (S) , постоянная на каждой из границ $(S^{(l)})$:

$$\alpha = \alpha^{(l)} \text{ на } (S^{(l)});$$

пусть константы $\alpha^{(l)}$ так подобраны, что функция $f - \alpha$ удовлетворяет условиям (42).

Имеем:

$$\begin{aligned} \int_{(S)} (f - \alpha) \rho^{(\lambda)} d\sigma &= \int_{(S)} f \rho^{(\lambda)} d\sigma - \sum_{l=1}^{l=k} \alpha^{(l)} \int_{(S^{(l)})} \rho^{(\lambda)} d\sigma = \\ &= \int_{(S)} f \rho^{(\lambda)} d\sigma - \alpha^{(l)}; \end{aligned}$$

поэтому достаточно положить:

$$\alpha^{(l)} = \int_{(S)} f \rho^{(l)} d\sigma, \quad (l = 1, 2, \dots, k). \quad (47)$$

Пусть w — решение задачи (B_e) , соответствующее функции $f = \alpha$; согласно § 12, имеем:

$$w = w_1 + w_2 + w_3 + \dots; \quad w_e = \alpha - f; \quad (48)$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} (f - \alpha) \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1, \\ w_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \overline{w}_{k-1} \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Первое равенство (49) дает нам для точек внутри (D_e) :

$$w_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} f \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 - \sum_{l=1}^{l=k} \frac{\alpha^{(l)}}{2\pi} \int_{(S^{(l)})} \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 = W_1,$$

для точек же на (S) :

$$\overline{w}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} f \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 - \sum_{l=1}^{l=k} \frac{\alpha^{(l)}}{2\pi} \int_{(S^{(l)})} \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 = \overline{W}_1 - \alpha,$$

так как интеграл

$$\int_{(\hat{S}^{(l)})} \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1$$

равен нулю, если m_0 находится внутри (D_e) или на одной из поверхностей $(S^{(l)})$, $\lambda \neq l$, и равен 2π , если m_0 лежит на $(S^{(l)})$.

Пользуясь найденной величиной \overline{w}_1 для вычисления w_2 и т. д., получим последовательно:

$$w_2 = W_2, \quad \overline{w}_2 = \overline{W}_2 - \alpha, \quad w_3 = W_3, \quad \overline{w}_3 = \overline{W}_3 - \alpha, \dots$$

Отсюда следует, что ряды (46) и (48) не отличаются друг от друга внутри (D_e) , и что ряд (48) сходится в этой области даже тогда, когда условия (42) — не выполнены, но в этом

последнем случае

$$W_e = \alpha - f;$$

[α здесь определяется равенствами (47)].

В § 9 (III) мы доказали, что всякий потенциал

$$\int_{(S_l)} \frac{\rho^{(\lambda)} d\sigma_1}{r_{10}} \quad (50)$$

имеет постоянное значение внутри каждой из поверхностей $(S^{(l)})$. Пусть $C_l^{(\lambda)}$ — значение потенциала (50) внутри $(S^{(l)})$. Можно всегда подобрать такие числа

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k,$$

чтобы выполнялись следующие k равенств:

$$\sum_{l=1}^{l=k} \gamma_l \int_{(S^{(l)})} \frac{\rho^{(l)} d\sigma}{r_{10}} = \alpha^{(\lambda)} \text{ на } (S^{(\lambda)}), \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k). \quad (51)$$

Эти равенства равносильны следующим:

$$\sum_{l=1}^{l=k} \gamma_l C_l^{(\lambda)} = \alpha^{(\lambda)}. \quad (51')$$

Если бы система (51') не имела решений при некоторых значениях констант $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)}$, то можно было бы найти числа $\delta_1, \dots, \delta_k$, удовлетворяющие условиям:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \delta_\lambda C_l^{(\lambda)} = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, k).$$

Но для таких чисел $\delta_1, \dots, \delta_k$ потенциал

$$\int_{(S_l)} \sum_{l=1}^{l=k} \delta_l \rho^{(l)} \frac{d\sigma_1}{r_{10}}$$

обращается в нуль во всех внутренних областях, ограниченных поверхностями $(S^{(l)})$; он, следовательно, везде равен нулю, и мы получаем:

$$\sum_{l=1}^{l=k} \delta_l \rho^{(l)} = 0,$$

что невозможно ввиду линейной независимости функций $\rho^{(l)}$. Отсюда вытекает, что мы, действительно, можем найти числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$. Равенства (51) показывают, что на поверхности (S)

$$V_0 = \int_{(S)} \sum_{l=1}^{l=k} \gamma_l \rho^{(l)} \frac{d\sigma_1}{r_{10}} = \alpha.$$

Положим:

$$V = V_0 - W. \quad (52)$$

Вычисляя V_e , находим:

$$V_e = (V_0)_e - W_e = \alpha - \alpha + f = f,$$

откуда следует, что функция V есть решение поставленной задачи.

В данном случае, решение задачи А получено в виде суммы погенциала простого слоя и погенциала двойного слоя.

§ 14. Случай (J). Исследование условия:

$$\zeta = -1 \text{ не полюс}$$

Остается еще рассмотреть задачу Дирихле для случая (J). Займемся сначала внутренней задачей. Для решения соответствующей задачи В следует отыскать решение уравнения (5)

$$\vartheta_0 = \frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S_1)} \vartheta(1) \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + f(0)$$

при $\zeta = -1$. В этом случае решение определяется значением функции (17)

$$\vartheta(0) = \frac{\mathcal{D}_2(\zeta, 0)}{\mathcal{D}_2(\zeta)}$$

при $\zeta = -1$, если это число не является ее полюсом.

Мы показали в § 17 (III), что у уравнения (12)

$$\mu(0) = -\frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + f(0)$$

существует k фундаментальных функций, соответствующих характеристическому числу $\zeta = -1$. Эти функции линейно

независимы. Если $\psi^{(\lambda)}$ одна из них, то

$$\int_{(S^{(l)})} \psi^{(l)}(0) d\sigma = 0, \quad \text{если } l \neq \lambda;$$

$$\int_{(S^{(\lambda)})} \psi^{(\lambda)}(0) d\sigma = 1, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k),$$

и

$$\psi^{(\lambda)}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \psi^{(\lambda)}(1) \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1.$$

Отсюда следует, что уравнение (5) не может иметь решения при $\zeta = -1$, если не выполняются следующие условия:

$$\int_{(S)} f(0) \psi^{(\lambda)}(0) d\sigma = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k). \quad (53)$$

При наличии этих условий, число $\zeta = -1$ не может быть полюсом функции $\mathfrak{D}(\zeta)$.

Умножая обе части равенства

$$\mathcal{D}_2(\zeta, 0) = \frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S_1)} \mathcal{D}_2(\zeta, 1) \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + \mathcal{D}_2(\zeta) f(0)$$

на $\psi^{(\lambda)}(0)$, интегрируя произведение по всей границе (S) и принимая во внимание условия (53), получаем:

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \mathcal{D}_2(\zeta, 0) \psi^{(\lambda)}(0) d\sigma &= \frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S)} \psi^{(\lambda)}(0) \left(\int_{(S_1)} \mathcal{D}_2(\zeta, 1) \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \right) d\sigma = \\ &= -\frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S_1)} \mathcal{D}_2(\zeta, 1) \left(\int_{(S)} \psi^{(\lambda)}(0) \frac{\cos(r_{01}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma \right) d\sigma_1 = \\ &= -\zeta \int_{(S_1)} \mathcal{D}_2(\zeta, 1) \psi^{(\lambda)}(\lambda) d\sigma_1 \end{aligned}$$

и далее

$$(1 + \zeta) \int_{(S)} \mathcal{D}_2(\zeta, 0) \psi^{(\lambda)}(0) d\sigma = 0.$$

Последний интеграл — целая функция ζ ; при $\zeta \neq -1$ она равна нулю и должна поэтому равняться нулю и при $\zeta = -1$.

Таким образом,

$$\int_{(S)} \mathcal{D}_2(-1, 0) \psi^{(\lambda)}(0) d\sigma = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k). \quad (54)$$

Допуская теперь, что $\zeta = -1$ полюс функции (17), имеем:

$$\mathcal{D}_2(-1, 0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \mathcal{D}_2(-1, 1) \frac{\cos(r_{10}N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1.$$

Принимая во внимание лемму 2 § 8, заключаем, что

$$\mathcal{D}_2(-1, 0) = C^{(l)} \quad \text{на } (S^{(l)}), \quad (l = 1, 2, \dots, k)$$

и что $\mathcal{D}_2(-1, 0)$ равна нулю на границе $(S^{(0)})$.

Подставляя это значение $\mathcal{D}_2(-1, 0)$ в равенство (54), получаем:

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \mathcal{D}_2(-1, 0) \psi^{(\lambda)} d\sigma &= \int_{(S^{(0)})} \mathcal{D}_2(-1, 0) \psi^{(\lambda)} d\sigma + \\ &+ \sum_{l=1}^k \int_{(S^{(l)})} \mathcal{D}_2(-1, 0) \psi^{(\lambda)} d\sigma = \sum_{l=1}^k C^{(l)} \int_{(S^{(l)})} \psi^{(\lambda)} d\sigma = C^{(\lambda)} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда выводим, что функция $\mathcal{D}_2(-1, 0)$ должна во всём пространстве равняться нулю: это, однако, невозможно, вследствие несократимости функции $\vartheta(0)$.

Итак, при наличии условий (53), $\zeta = -1$ не может быть полюсом функции $\vartheta(0)$.

§ 15. Решение задачи с условиями (53); значение этих условий

Если $\zeta = -1$ не полюс функции $\vartheta(0)$, то все же нельзя подставить -1 вместо ζ в ряд (8)

$$W = W_1 + \zeta W_2 + \zeta^2 W_3 + \dots,$$

так как радиус сходимости этого ряда может равняться единице; число $\zeta = 1$ может быть полюсом W , но не может быть полюсом функции

$$(1 - \zeta) W = W_1 + \zeta(W_2 - W_1) + \zeta^2(W_3 - W_2) + \dots$$

Отсюда следует, что значение W при $\zeta = -1$ определяется рядом

$$W = \frac{1}{2} [(W_1 - (W_2 - W_1) + (W_3 - W_2) - \dots)] \quad (55)$$

и что этот ряд дает решение внутренней задачи Дирихле для случая (J), при выполнении условий (53). Эти условия совершенно чужды поставленной задаче, но легко видеть, что они необходимы для соответствующей задачи В. В самом деле, если

$$W = \int_{(S_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1$$

— некоторый потенциал двойного слоя, то

$$\int_{(S)} W_i \psi^{(\lambda)} d\sigma = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k).$$

Итак, не существует потенциалов двойного слоя, не подчиненных условиям (53); задача В — невозможна, если значения потенциала на (S) не подчинены этим условиям.

Для доказательства нашего предложения достаточно заметить, что

$$W_i = \left(\int_{(S_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \right)_i = \int_{(S_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + 2\pi\mu(0)$$

и что вследствие этого

$$\begin{aligned} & \int_{(S)} W_i \psi^{(\lambda)} d\sigma = \\ &= \int_{(S)} \psi^{(\lambda)} \left(\int_{(S_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 \right) d\sigma + 2\pi \int_{(S)} \mu(0) \psi^{(\lambda)}(0) d\sigma = \\ &= - \int_{(S_1)} \mu(1) \left(\int_{(S)} \psi^{(\lambda)} \frac{\cos(r_{01} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma \right) d\sigma_1 + 2\pi \int_{(S)} \mu(0) \psi^{(\lambda)}(0) d\sigma = \\ &= - 2\pi \int_{(S_1)} \mu(1) \psi^{(\lambda)}(1) d\sigma_1 + 2\pi \int_{(S)} \mu(0) \psi^{(\lambda)}(0) d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Та же формула показывает, что для точки m_0 , лежащей на $(S^{(\lambda)})$,

$$\bar{w}_1 = \bar{W}_1 + \alpha^{(\lambda)},$$

так как нормаль к $(S^{(\lambda)})$, в случае J, — направлена внутрь $(S^{(\lambda)})$.

Отсюда следует, что для точки m_0 на (S)

$$\bar{w}_1 = \bar{W}_1 + \alpha.$$

Вполне аналогично заключаем, что

$$w_2 = W_2, \quad \bar{w}_2 = \bar{W}_2 + \alpha; \quad w_3 = W_3, \quad \bar{w}_3 = \bar{W}_3 + \alpha; \dots$$

Отсюда вытекает, что для всех точек внутри (D_i) ряд (56) совпадает с рядом (55) и что ряд (55) сходится внутри (D_i) даже в том случае, когда условия (53) не выполнены; однако в этом последнем случае

$$W_i = f - \alpha.$$

Подберем теперь так числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, чтобы на поверхности $(S^{(\lambda)})$, $\lambda = 1, 2, \dots, k$ имело место равенство

$$\sum_{l=1}^{l=k} \gamma_l \int_{(S)} \frac{\psi^{(l)} d\sigma}{r_{10}} = \alpha^{(\lambda)}; \quad (57)$$

это всегда возможно. В самом деле, мы знаем, что потенциалы

$$\int_{(S)} \frac{\psi^{(l)} d\sigma}{r_{10}} \quad (58)$$

имеют постоянное значение во всех областях вне (D_i) . Если (58) равен $C_\lambda^{(n)}$ внутри $(S^{(\lambda)})$, то, вспоминая, что (58) равняется нулю вне $(S^{(0)})$, мы заключаем, что уравнения (57) равносильны уравнениям

$$\sum_{l=1}^{l=k} \gamma_l C_\lambda^{(n)} = \alpha^{(\lambda)}.$$

Эта последняя система должна иметь решения при любых $\alpha^{(\lambda)}$; в противном случае система

$$\sum_{l=1}^{l=k} \delta_l C_\lambda^{(n)} = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k)$$

имела бы решение, в котором одно из чисел $\delta_1, \dots, \delta_k$ было бы отлично от нуля; тогда потенциал

$$\int_{(S_l)} \sum_{l=1}^{l=k} \delta_l \psi_l^{(l)} \frac{d\sigma_1}{r_{10}}$$

оказался бы равным нулю во всех областях вне (D_i) и, следовательно, везде обратился бы в нуль; отсюда вытекало бы, что

$$\sum_{l=1}^{l=k} \delta_l \psi_l^{(l)} = 0$$

— равенство невозможное, ввиду линейной независимости функций $\psi_l^{(l)}$, $l=1, 2, \dots, k$.

Теперь положим

$$V_0 = \int_{(S_l)} \sum_{l=1}^{l=k} \gamma_l \psi_l^{(l)} \frac{d\sigma_1}{r_{10}}$$

и рассмотрим функцию

$$V = W + V_0.$$

Имеем

$$V_i = W_i + (V_0)_i = f - \alpha + \alpha = f;$$

это показывает, что функция V есть решение поставленной задачи. Решение внутренней задачи для случая (J), как и решение внешней задачи для случая (E), состоит из суммы двух слагаемых: потенциала двойного слоя и потенциала простого слоя.

§ 17. Внешняя задача для случая (J)

Хотя эта задача равносильна внешней задаче, соответствующей поверхности $(S^{(0)})$ и k внутренним задачам, соответствующим поверхностям $(S^{(l)})$, $l=1, 2, \dots, k$, но формулы, установленные в предыдущих параграфах, позволяют найти ее решение сразу — в виде единого равенства.

Решение это возможно получить, заменяя в $\vartheta(0)$ ζ единицей, если $\zeta=1$ — не полюс этой функции.

Принимая во внимание, что $\zeta=1$ характеристическое число уравнения (5) и что у сопряженного с уравнением (5) уравнения (12) существует одна фундаментальная функция

[изученная нами в § 13 (III)], заключаем, что у уравнения (5) имеется решение при $\zeta = 1$, если

$$\int_{(S_1)} f \rho \, d\sigma = 0. \quad (59)$$

При наличии условия (59), $\zeta = 1$ не может быть полюсом функции (17). В самом деле, из равенства

$$\mathcal{D}_2(\zeta, 0) = \frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S_1)} \mathcal{D}_2(\zeta, 1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + \mathcal{D}_2(\zeta) f(0)$$

можно вывести, при помощи (59), что

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \mathcal{D}_2(\zeta, 0) \rho \, d\sigma &= -\frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S_1)} \mathcal{D}_2(\zeta, 1) \left(\int_{(S)} \rho \frac{\cos(r_{01} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma \right) d\sigma_1 = \\ &= \zeta \int_{(S_1)} \mathcal{D}_2(\zeta, 1) \rho(1) d\sigma_1 \end{aligned}$$

и что, следовательно,

$$(1 - \zeta) \int_{(S_1)} \mathcal{D}_2(\zeta, 0) \rho(0) d\sigma = 0.$$

Интеграл в последнем равенстве — целая функция ζ , он должен, поэтому, обращаться в нуль и при $\zeta = 1$; таким образом, имеем:

$$\int_{(S)} \mathcal{D}_2(1, 0) \rho(0) d\sigma = 0. \quad (60)$$

Если $\zeta = 1$ есть полюс функции $\mathfrak{g}(0)$, то

$$\mathcal{D}_2(1, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \mathcal{D}_2(1, 1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1,$$

откуда, при помощи леммы § 8,

$$\mathcal{D}_2(1, 0) = C \quad \text{на } (S),$$

и, на основании (64),

$$C \int_{(S)} \rho \, d\sigma = 0.$$

Итак, $C=0$ и дробь (17), оказывается, можно сократить, что противоречит сделанному о ней предположению. При наличии условия (59), $\zeta=1$ не может быть полюсом $\Psi(0)$.

Таким образом, условие (60) нам показывает, что функция

$$(1 + \zeta) W = W_1 + \zeta(W_2 + W_1) + \zeta^2(W_3 + W_2) + \dots$$

не допускает ни полюса $\zeta=1$, ни полюса $\zeta=-1$; кроме того, функция

$$W = \frac{1}{2} [W_1 + (W_2 + W_1) + (W_3 + W_2) + \dots] \quad (61)$$

дает значение W при $\zeta=1$; отсюда следует, что $W_e = -f$.

Условие (59) не имеет ничего общего с рассматриваемой нами задачей Дирихле, но условие это необходимо для соответствующей задачи В.

Любой потенциал двойного слоя

$$W = \int_{(S_1)} \mu(1) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1$$

удовлетворяет условию

$$\int_{(S)} W_{e\rho} d\sigma = 0;$$

чтобы в этом убедиться, достаточно повторить, почти без изменений, рассуждения § 12.

Возьмем фундаментальную функцию ρ , для которой

$$\int_{(S)} \rho d\sigma = 1;$$

потенциал

$$\int_{(S)} \frac{\rho d\sigma}{r_{10}}$$

имеет постоянное значение внутри (D_1) . Пусть C — значение этой константы. Полагая

$$\int_{(S)} f\rho d\sigma = \alpha,$$

§ 18. Замечание о принадлежности решения задачи Дирихле к классу $H(l, A, \lambda)$

Мы ограничимся для простоты исследованием областей обыкновенного случая и докажем теорему

Теорема 1. Если $(S) \in \mathcal{L}_{k+1}(B, \lambda)$, $(k \geq 0)$, и $f \in H(l, A, \lambda)$ $(0 \leq l \leq k+1)$, то решение внутренней [внешней] задачи Дирихле $\in H(l, cA, \lambda')$ в (D_i) [в (D_e)].

Действительно, как мы видели, решение внутренней задачи Дирихле представляется всегда потенциалом двойного слоя $W[\mu]$, плотность μ которого удовлетворяет интегральному уравнению

$$\vartheta(0) = \frac{\zeta}{2\pi} \int_{(S_i)} \vartheta(1) \frac{\cos(r_{10} N_i)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + \frac{f}{2\pi} = \frac{\zeta}{2\pi} \bar{W}[\vartheta] + \frac{f}{2\pi}, \quad (63)$$

где $\zeta = -1$. Мы сначала докажем теорему для $k=0, l=0$. Так как $f \in H(0, A, \lambda)$, то $|f| < A$ и, так же как в § 18 (III), доказывается, что $|\vartheta| < cA$. Отсюда на основании теоремы 1 § 21 (II) следует, что $\bar{W}[\vartheta] \in H(0, c_1 A, \lambda')$. Поэтому $\vartheta \in H(0, c_2 A, \lambda')$ на (S) и, следовательно, на основании теоремы 1 § 19 (II) следует $W[\vartheta] \in H(0, c_3 A, \lambda')$ и теорема для $l=0, k=0$ в случае внутренней задачи Дирихле доказана.

Переходим к рассмотрению внешней задачи. Решение внешней задачи представляется потенциалом двойного слоя в том и только в том случае, когда

$$\int_{(S_i)} \rho_1 f d\sigma = 0, \quad (64)$$

где ρ_1 плотность потенциала простого слоя, равного единице на (S) .

Если условие (64) не выполнено, то решение внешней задачи Дирихле представляется суммой

$$W[\vartheta_1] + CV[\rho_1], \quad (65)$$

где постоянная C выбрана так, чтобы

$$\int_{(S)} \rho_1 (f - C) d\sigma = 0,$$

а ϑ_1 есть решение интегрального уравнения (63), в котором $\zeta=1$ и f заменено на $f-C$. Не выписывая этого уравнения, будем называть его (63_e) . Так как $|f| < A$, то

$$|C| = \frac{\left| \int_{(S)} p_1 f d\sigma \right|}{\int_{(S)} p_1 d\sigma} < A,$$

так как $p_1 > 0$ на (S) . Отсюда следует, что $CV[p_1] \in H(1, Cc_1, \lambda')$ в (D_i) , так как в § 18 (III) было показано $V[p_1] \in H(k+1, c_1, \lambda')$ в (D_e) .

Остается убедиться, что $W[\vartheta_1] \in H(0, c_2A, \lambda')$. Для этого достаточно убедиться, что среди решений уравнения (63) содержатся решения, удовлетворяющие неравенству $|\vartheta_1| < c_3A$, где c_3 зависит лишь от (S) . Доказательство этого утверждения аналогично проведенному в § 18 (III) для задачи Неймана, и мы останавливаться на нем не будем. Из неравенства $|\vartheta_1| < c_3A$ следует, что $W[\vartheta_1] \in H(0, c_4A, \lambda')$, и из уравнения (63_e) следует $\vartheta_1 \in H(0, c_5A, \lambda')$, откуда $W[\vartheta_1] \in H(0, c_6A, \lambda')$.

Из формулы (65) следует утверждение теоремы для внешней задачи Дирихле в случае $k=0, l=0$.

Перейдем к доказательству теоремы для $k \geq 0, l=1, 2, \dots, k+1$.

Пусть $f \in H(l, A, \lambda)$ на (S) . Тогда на основании теоремы 3 § 19 (II) следует, что $W[f] \in H(l, cA, \lambda')$ в (D_i) и в (D_e) . Так как $l \geq 1$, то $W[f]$ имеет непрерывную на (S) нормальную производную и, следовательно, $W[f]$ как в (D_i) так и в (D_e) представляется потенциалом простого слоя. Потенциал простого слоя, совпадающий с $W[f]$ в (D_i) , обозначим V_1 , а совпадающий с $W[f]$ в (D_e) — через V_2 . Тогда потенциал простого слоя

$$(\quad V = \frac{1}{4\pi} [V_1 - V_2] \quad (66)$$

решает как внешнюю, так и внутреннюю задачу Дирихле.

Действительно, значения на (S) потенциала V_1 равны W_i , а потенциала V_2 равны W_e . Поэтому значения на (S) потен-

циала V равны

$$V = \frac{W_i - W_e}{4\pi} = f,$$

что и доказывает наше утверждение.

Для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что V_1 и $V_2 \in H(l, cA, \lambda')$ в (D_i) и в (D_e) .

Для V_2 доказательство просто. Действительно, $W[f] \in H(l, cA, \lambda')$ в (D_e) и первые производные от $W[f] \in H(l-1, cA, \lambda')$, а следовательно, $\frac{dW}{dn} \in H(l-1, c_1A, \lambda')$ на (S) , так как $l-1 \leq k$. Поэтому на основании теоремы 1 § 18 (III) $V_2 \in H(l, c_2A, \lambda')$ в (D_i) и в (D_e) , так как V_2 является решением внешней задачи Неймана

$$\frac{dV_{2e}}{dn} = \frac{dW}{dn}.$$

Докажем, что и $V_1 \in H(l, cA, \lambda')$. Действительно, V_1 является решением внутренней задачи Неймана

$$\frac{dV_{1i}}{dn} = \frac{dW}{dn}.$$

Пусть V'_1 то из решений этой задачи, которое удовлетворяет на (S) условию

$$\int_{(S)} \rho_1 V'_1 d\sigma = 0.$$

Из теоремы 1 § 18 (III) следует, что $V'_1 \in H(l, c_1A, \lambda')$ как в (D_i) , так и в (D_e) . Очевидно, что

$$V_1 = V'_1 + cV[\rho_1], \quad (67)$$

откуда следует

$$V_{1i} = W_i = 2\pi f + \overline{W}[f] = V'_{1i} + C,$$

и, следовательно,

$$|c| = |2\pi f + \overline{W}[f] - V'_{1i}| < c_2A.$$

Так как $V[\rho_1] \in H(k+1, c_1, \lambda')$ и тем самым $\in H(l, c_1, \lambda')$, то из (67) следует $V_1 \in H(l, c_4A, \lambda')$ и теорема полностью доказана.

Заметим, что для случая $l = 1, 2, \dots, k$ теорема может быть доказана тем же путем, что и для $l = 0$, с использованием теоремы 3 § 19 и теоремы 3 § 21 (II).

Для поверхностей и данных из класса $C^{(k)}$ следует

Теорема 2. Если $(S) \in C^{(k+1)}(B)$, ($k \geq 1$), и $f \in C^{(l)}(A)$ ($1 \leq l \leq k+1$), то решение внутренней [внешней] задачи Дирихле $\in C^{(l-1)}(cA)$ в (D_i) [в (D_e)]. Если $f \in C^{(0)}$, то и решение $\in C^{(0)}$.

Действительно, так как $l \geq 1$, то $f \in H(l-1, A, 1)$ и $(S) \in H(k, B, 1)$, и поэтому на основании теоремы 1 заключаем, что решение принадлежит $H(l-1, cA, \lambda)$ и, следовательно, принадлежит $C^{(l-1)}(cA)$. Если $l = 0$, т. е. f непрерывна на (S) , то решение задачи Дирихле непрерывно в (D_i) и в (D_e) , но нельзя утверждать правильную непрерывность этого решения. Теорема доказана.

ГЛАВА V

ФУНКЦИИ ГРИНА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ.

§ 1. Функция Грина и ее основные свойства

Пусть функция $f \in H(1, A, \lambda)$ на (S) . Тогда, как мы видели в § 18 (IV), потенциал двойного слоя $W[f]$ с плотностью f представляется как в (D_i) , так и в (D_e) потенциалами простого слоя V_1 и V_2 , совпадающими с W в (D_i) и в (D_e) соответственно. При этом потенциал простого слоя

$$V = \frac{1}{4\pi} (V_1 - V_2) \quad (1)$$

представляет собой одновременно решения внутренней и внешней задачи Дирихле: $V = f$ на (S) . Как мы видели, при этом $V \in H(1, cA, \lambda')$ в (D_i) и в (D_e) .

Пусть $\mathcal{M}(x, y, z)$ и $m(\xi, \eta, \zeta)$ две заданные точки, а R расстояние между ними, причем R будем считать направленным из \mathcal{M} в m .

Считая \mathcal{M} фиксированной в (D_i) или в (D_e) , найдем гармоническую функцию Γ точки $m(\xi, \eta, \zeta)$, представляющую такое решение внутренней [если \mathcal{M} в (D_i)] или внешней [если \mathcal{M} в (D_e)] задачи Дирихле, что

$$\Gamma = \frac{1}{R} \text{ на } (S). \quad (2)$$

Функция $\frac{1}{R}$ в окрестности (S) имеет производные любого порядка, и поэтому заключаем, что Γ является потенциалом простого слоя, который имеет правильно непрерывные производные первого порядка соответственно в (D_i) и в (D_e) . Кроме того, Γ зависит от выбора точки \mathcal{M} и является также функцией точки $\mathcal{M}(x, y, z)$. Положим

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{R} - \Gamma, \quad (3)$$

Функция $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = G(\mathcal{M}, m)$ называется функцией Грина. Как функция точки $m(\xi, \eta, \zeta)$ она гармоническая в любой точке (D_i) или (D_e) , за исключением точки $\mathcal{M}(x, y, z)$, где она обращается в бесконечность. Очевидно, на (S) она равна нулю.

Докажем, что функция Грина симметричная функция точек \mathcal{M} и m , т. е. что

$$G(\mathcal{M}, m) = G(m, \mathcal{M}). \quad (4)$$

Для доказательства возьмем две различные точки \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 в (D_i) и рассмотрим две функции в (D_i)

$$G_1(m) = G(\mathcal{M}_1, m),$$

$$G_2(m) = G(\mathcal{M}_2, m).$$

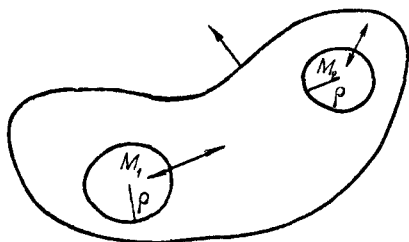


Рис. 29.

Пусть (σ_1) и (σ_2) означают сферы с центрами в \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 и настолько малого радиуса ρ , чтобы сферы (σ_1) и (σ_2) лежали целиком в (D_i) и не имели между собой общих точек (рис. 29). В части (D_i) , лежащей вне сфер (σ_1) и (σ_2) , функции

$G_1(m)$ и $G_2(m)$ гармонические, непрерывные и имеют непрерывные и ограниченные частные производные первого порядка. Поэтому можно применить тождество Грина.

Пользуясь этим тождеством и выбирая на (σ_1) и (σ_2) внешние нормали, получим:

$$\begin{aligned} \int_{(\sigma_1)} \left(G_1 \frac{dG_2}{dn} - G_2 \frac{dG_1}{dn} \right) d\sigma - \int_{(\sigma_2)} \left(G_1 \frac{dG_2}{dn} - G_2 \frac{dG_1}{dn} \right) d\sigma - \\ - \int_{(\sigma)} \left(G_1 \frac{dG_2}{dn} - G_2 \frac{dG_1}{dn} \right) d\sigma = 0. \end{aligned}$$

На поверхности (S)

$$G_1 = 0, \quad G_2 = 0$$

и последнее равенство принимает вид:

$$\int_{(\sigma_1)} \left(G_1 \frac{dG_2}{dn} - G_2 \frac{dG_1}{dn} \right) d\sigma = \int_{(\sigma_2)} \left(G_2 \frac{dG_1}{dn} - G_1 \frac{dG_2}{dn} \right) d\sigma. \quad (5)$$

Исследуем левую часть этого равенства. Внутри сферы (σ_1) и на ее поверхности G_2 и $\frac{dG_2}{dn}$ ограничены. Обозначая через R_1 расстояние от точки \mathcal{M}_1 до m , получим на (σ_1) :

$$\frac{d}{dn} \frac{1}{R_1} = \left(\frac{d}{dR_1} \frac{1}{R_1} \right)_{R_1=\rho} = -\frac{1}{\rho^2}$$

и, следовательно, на (σ_1)

$$G_1 = \frac{1}{\rho} - \Gamma_1, \quad \frac{dG_1}{dn} = -\frac{1}{\rho^2} - \frac{d\Gamma_1}{dn},$$

где Γ_1 и $\frac{d\Gamma_1}{dn}$ ограниченные функции на (σ_1) .

Так как $G_2(m)$ в окрестности точки \mathcal{M}_1 имеет ограниченные производные всех порядков, то $\frac{dG_2}{dn}$ ограничена на (σ_1) , а $G_2(m)$ отличается от $G(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_1) = G_2(\mathcal{M}_1)$ величиной вида $A\rho$, где A ограниченная функция. Отсюда следует, что подынтегральная функция в левой части (5) равна

$$\frac{1}{\rho^2} G(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_1) + \frac{1}{\rho} \frac{dG_2}{dn} - \Gamma_1 \frac{dG_2}{dn} + \frac{A}{\rho}.$$

Отсюда следует, что интеграл в левой части (5) отличается от $4\pi G(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_1)$ на бесконечно малую порядка $B\rho$. Аналогично заключаем, что правая часть (5) отличается от $4\pi G(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ на бесконечно малую порядка $B\rho$. Следовательно, разность

$$4\pi [G(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_1) - G(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)],$$

как независимая от ρ и бесконечно малая величина вместе с ρ , равна нулю. Таким образом равенство (4) доказано.

Из симметрии $G(\mathcal{M}, m)$ следует, что $G(\mathcal{M}, m)$ гармоническая, если ее рассматривать как функцию точки \mathcal{M} . Ее производные по ξ, η, ζ и по x, y, z также гармонические функции в любой точке, где

$$(\xi - x)^2 + (y - \eta)^2 + (\zeta - z)^2 > 0.$$

Аналогично доказательство симметричности функции Грина для области (D_e) . В последующем функцию Грина для (D_i) будем обозначать через $G_i(\mathcal{M}, m)$, а для (D_e) через $G_e(\mathcal{M}, m)$.

Пусть \mathcal{M} находится внутри (D_i) . Тогда $G_i(\mathcal{M}, m)$ как функция точки m стремится к $+\infty$, если m приближается

к \mathcal{M} , и, следовательно, $G_i(\mathcal{M}, m)$ положительна на сфере (σ) достаточно малого радиуса ρ с центром в \mathcal{M} . Так как $G_i(\mathcal{M}, m)$ гармоническая в части (D_i) вне (σ) и на границе области неотрицательна, то она неотрицательна всюду и, следовательно, заключаем:

$$0 \leq \frac{1}{R} - \Gamma = G_i(\mathcal{M}, m).$$

Кроме того, Γ как гармоническая функция, принимающая на (S) положительные значения $\frac{1}{R}$, также положительна. Поэтому

$$0 \leq G_i(\mathcal{M}, m) = \frac{1}{R} - \Gamma < \frac{1}{R}. \quad (6)$$

То же заключение можно сделать и для $G_e(\mathcal{M}, m)$.

Так как

$$\int_{(D_i)} \frac{1}{R^2} d\tau \leq 4\pi \int_0^{d_0} \frac{1}{R^2} R^2 dR = 4\pi d_0,$$

где d_0 диаметр области (D) , то получаем важный для последующего вывод:

$$\int_{(D_i)} [G_i(\mathcal{M}, m)]^2 d\tau \leq 4\pi d_0 = A, \quad (7)$$

т. е. интеграл от квадрата функции Грина $G_i(\mathcal{M}, m)$ ограничен числом, не зависящим от положения точки \mathcal{M} . Нетрудно также убедиться в том, что последний интеграл является непрерывной функцией точки \mathcal{M} . На доказательстве последнего не останавливаемся.

§ 2. Решение задачи Дирихле для одного частного случая

Пусть функция $F \in H(1, A, \lambda)$ на (S) . Тогда решение соответствующей задачи Дирихле представляется потенциалом простого слоя, который обозначим через V . На основании замечаний к § 6 (III) имеем, считая точку \mathcal{M} внутри (D_i) :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi} \int_{(S_i)} \frac{dV_i}{dn} \frac{d\sigma_1}{R} + \frac{1}{4\pi} \int_{(S_i)} V_i \frac{\cos(RN_1)}{R^2} d\sigma_1 = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{(S_i)} \frac{dV_i}{dn} \frac{d\sigma_1}{R} + \frac{1}{4\pi} \int_{(S_i)} F \frac{\cos(RN_1)}{R^2} d\sigma_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Наконец, применяя тождество Грина к функциям V и Γ , найдем, учитывая, что на (S) $\Gamma = \frac{1}{R}$,

$$\int_{(\dot{S}_1)} \left(\Gamma \frac{dV_i}{dn} - V_i \frac{d\Gamma}{dn} \right) d\tau_1 = \int_{(\dot{S}_1)} \left(\frac{1}{R} \frac{dV_i}{dn} - F \frac{d\Gamma}{dn} \right) d\tau_1 = 0.$$

Умножая последнее равенство на $\frac{1}{4\pi}$ и вычитая из предыдущего, найдем:

$$V = -\frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{S}_1)} F \left\{ \frac{d}{dn} \frac{1}{R} - \frac{d\Gamma}{dn} \right\} d\tau = -\frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{S})} F \frac{dG_i}{dn} d\tau. \quad (9)$$

Равенство (9) позволяет решить задачу Дирихле для любой функции F , подчиненной вышеупомянутым условиям, если известна функция Грина. Мы свели общую задачу Дирихле к совершенно частной задаче: к отысканию функции Γ .

Все вычисления были сделаны в предположении, что мы решаем внутреннюю задачу.

Для того чтобы решить внешнюю задачу, нам нужно только изменить знак в тождестве (8); получится следующая окончательная формула:

$$V = \frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{S}_1)} F \frac{dG_e}{dn} d\tau, \quad (9')$$

дающая решение внешней задачи.

Следствие. Предположим, что $F = 1$. Для внутренней задачи $V = 1$, и в (D_i) мы находим:

$$-\int_{(\dot{S}_1)} \frac{dG_i}{dn} d\tau = 4\pi.$$

В (D_e) это равенство не имеет более места. Но когда точка \mathcal{M} приближается к (S) , то вторая часть (9') стремится к единице; если точка эта достаточно близка к (S) и находится с внешней ее стороны, то разность

$$\int_{(\dot{S}_1)} \frac{dG_e}{dn} d\tau - 4\pi$$

делается сколь угодно малой;

$$\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{dG_e}{dn} d\sigma$$

— гармоническая функция, принимающая на (S) значение единица и обращающаяся в нуль в бесконечности; таким образом, она меньше единицы в любой точке (D_e) .

§ 3. Лемма Ляпунова

Установим одно неравенство, принадлежащее Ляпунову и необходимое для дальнейшего изложения. Пусть $m_0(x_0, y_0, z_0)$ точка поверхности (S) . Решим задачу Дирихле при помощи способа § 2, и полагая, что за функцию F взято выражение

$$F = (\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2.$$

Обозначим через U искомое решение внутренней задачи:

$$U = -\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} F \frac{dG_i}{dn} d\sigma. \quad (10)$$

Рассмотрим круговой цилиндр с осью, направленной по нормали к (S) в m_0 , и с основанием в виде круга радиуса ρ .

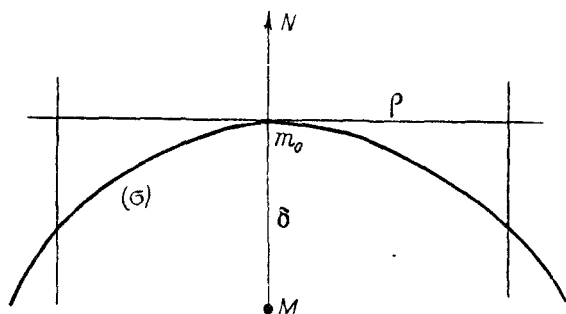


Рис. 30.

Пусть (σ) — часть (S) , вырезаемая этим цилиндром. Возьмем на нормали к (S) в m_0 некоторую точку M внутри (D_i) ; обозначим расстояние от m_0 до M через δ (рис. 30).

U равен погенциалу простого слоя, так как функция F удовлетворяет условиям § 1. Если \mathcal{M} стремится к m_0 , то U имеет пределом значение F в m_0 , равное нулю; согласно теореме § 2 (II), имеем.

$$|U - F_0| = |U| < A\delta^\lambda, \quad (\lambda < 1). \quad (11)$$

Мы видели, что $G_i(\mathcal{M}, m)$, рассматриваемая как функция точки m , положительна в (D_i) и равна нулю на (S) . Отсюда следует, что ее производная по нормали к (S) не положительна, т. е.

$$-\frac{dG_i}{dn} \geq 0.$$

Представляя (10) в виде

$$U = \frac{1}{4\pi} \int_{(\sigma_1)} F\left(-\frac{dG_i}{dn}\right) d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{(S_1 - \sigma_1)} F\left(-\frac{dG_i}{dn}\right) d\sigma,$$

мы заключаем, что первый интеграл неотрицателен и что

$$U \geq \frac{1}{4\pi} \int_{(S_1 - \sigma_1)} F\left(-\frac{dG_i}{dn}\right) d\sigma. \quad (12)$$

Первый множитель произведения под знаком второго интеграла больше ρ^2 , так как точка интегрирования находится вне (σ) , а F — квадрат расстояния этой точки от m_0 . Второй множитель неотрицателен и, следовательно, интеграл не меньше

$$\frac{\rho^2}{4\pi} \int_{(S_1 - \sigma_1)} \left(-\frac{dG_i}{dn}\right) d\sigma.$$

Таким образом, имеем

$$\frac{\rho^2}{4\pi} \int_{(S_1 - \sigma_1)} \left(-\frac{dG_i}{dn}\right) d\sigma \leq U \leq A\delta^\lambda,$$

откуда

$$\frac{1}{4\pi} \int_{(S_1 - \sigma_1)} \left(-\frac{dG_i}{dn}\right) d\sigma \leq \frac{A\delta^\lambda}{\rho^2}. \quad (13)$$

Это неравенство и представляет собой ту лемму Ляпунова, которую мы хотели установить.

Если точка находится внутри (D_e) , то следует изменить знак в формуле (10); в этом случае G возрастает от нуля до $+\infty$ при переходе точки m от (S) к \mathcal{M} , и $\frac{dG_1}{dn_1}$ — положительна. Итак, для точек внутри (D_e) мы имеем:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{(S_1 - \sigma_1)} \frac{dG_e}{dn} d\sigma < \frac{A\delta^{\lambda}}{\rho^2}. \quad (13')$$

§ 4. Решение задачи Дирихле в общем случае

Пусть f — непрерывная функция, заданная на (S) ; найдем гармоническую функцию, определенную внутри (D_i) и принимающую на (S) те же значения, что f . Мы докажем, что решением этой задачи является функция

$$V = -\frac{1}{4\pi} \int_{(S_1)} f \frac{dG_i}{dn} d\sigma. \quad (14)$$

Заметим, прежде всего, что V — гармоническая функция внутри (D_i) . Она равна

$$V = -\frac{1}{4\pi} \int_{(S_1)} f \left\{ \frac{\partial G}{\partial \xi} \cos(Nx) + \frac{\partial G}{\partial \eta} \cos(Ny) + \frac{\partial G}{\partial \zeta} \cos(Nz) \right\} d\sigma_1,$$

функции же

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial G}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial G}{\partial \zeta}$$

— гармонические внутри (D_i) , если их рассматривать как функции $\mathcal{M}(x, y, z)$.

Предположим, что \mathcal{M} находится на нормали к (S) , проходящей через m_0 , и на расстоянии δ от этой точки. Рассмотрим тот же самый цилиндр, который был введен в предыдущем параграфе. Обозначая через f_0 значение f в m_0 и учитывая замечания конца § 2, имеем:

$$\begin{aligned} V - f_0 &= -\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} f \frac{dG_i}{dn} d\sigma - f_0 = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{(S_1)} f \frac{dG_i}{dn} d\sigma - \left(-\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} f_0 \frac{dG_i}{dn} d\sigma \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} (f - f_0) \left(-\frac{dG_i}{dn} \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (15)$$

Представим последнее равенство в виде

$$V - f_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{(\sigma)} (f - f_0) \left(-\frac{dG_i}{dn} \right) d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{(S-\sigma)} (f - f_0) \left(-\frac{dG_i}{dn} \right) d\sigma.$$

Предполагая, что значения f на (S) меньше B , имеем:

$$|f - f_0| < 2B.$$

Пользуясь непрерывностью функции f , выберем ρ настолько малым, чтобы имело место неравенство

$$|f - f_0| < \varepsilon \quad \text{на } (\sigma).$$

При этих условиях мы получим:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{4\pi} \int_{(\sigma)} (f - f_0) \left(-\frac{dG_i}{dn} \right) d\sigma \right| &< \\ &< \frac{1}{4\pi} \int_{(\sigma)} |f - f_0| \left(-\frac{dG_i}{dn} \right) d\sigma < \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{(\sigma)} \left(-\frac{dG_i}{dn} \right) d\sigma < \\ &< \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{(S)} \left(-\frac{dG_i}{dn} \right) d\sigma = \varepsilon. \end{aligned}$$

Для второго интеграла имеем:

$$\frac{1}{4\pi} \left| \int_{(S-\sigma)} (f - f_0) \left(-\frac{dG_i}{dn} \right) d\sigma \right| < \frac{2B}{4\pi} \int_{(S-\sigma)} \left(-\frac{dG_i}{dn} \right) d\sigma < \frac{2BA\delta^3}{\rho^2}$$

и окончательно

$$|V - f_0| < \varepsilon + \frac{2AB\delta^3}{\rho^2}. \quad (16)$$

Подберем теперь еще такое δ_0 , чтобы второе слагаемое (16) стало меньше ε . Мы находим:

$$|V - f_0| < 2\varepsilon, \quad \text{если } \delta < \delta_0;$$

это показывает, что $\lim V = f_0$, когда \mathcal{M} стремится к m_0 на нормали, проходящей через m_0 .

Повторяя несколько раз уже проведенные рассуждения, легко убедиться, что $\lim V = f_0$, если \mathcal{M} стремится к m_0 , оставаясь по одну сторону от (S) (рис. 31). В самом деле, если \mathcal{M} находится на нормали к (S) в m_1 и если δ_1 и δ_2 —

расстояния от m_1 до \mathcal{M} и до m_0 , то

$$\delta_1 < \delta, \quad \delta_2 < \delta_1 + \delta < 2\delta.$$

Таким образом, при достаточно малом δ , имеем:

$$|f_{m_1} - f_m| < \varepsilon, \quad |V_{\mathcal{M}} - f_{m_1}| < \varepsilon,$$

откуда следует, что

$$|V_{\mathcal{M}} - f_{m_0}| \leq |V_{\mathcal{M}} - f_{m_1}| + |f_{m_1} - f_{m_0}| < 2\varepsilon.$$

При решении внешней задачи Дирихле следует переменить

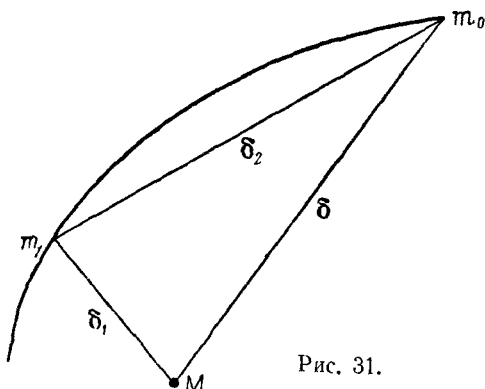


Рис. 31.

знак в формуле (14) и слегка изменить формулу (15); в этом случае f_0 не равен

$$\frac{1}{4\pi} \int_{(\bar{S})} f_0 \frac{dG_e}{dn} d\sigma,$$

но отличается от него на величину меньшую ε , если δ меньше $\delta^{(n)}$. Неравенство (16) здесь следует заменить неравенством

$$|V - f_0| < 2\varepsilon + \frac{2AB\delta^\lambda}{r^2}, \quad \text{если } \delta < \delta^{(1)}, \quad (16')$$

что не изменяет вытекающих из него заключений.

§ 5. Функция Ф. Неймана и ее свойства

Когда мы рассматривали внешнюю задачу Неймана для обыкновенного случая и случая (Е) [мы исключаем внешнюю задачу для случая (J)], то мы всегда имели возможность найти функцию $\Gamma^{(e)}$, гармоническую внутри (D_e), имеющую нормальные производные

$$\frac{\cos(RN)}{R^2}. \quad (17)$$

Внутренняя задача в обыкновенном случае и в случае (J) [мы исключаем внутреннюю задачу для случая (Е)] при таких условиях невозможна. В самом деле,

$$\int_{(S_i)} \frac{\cos(RN_i)}{R^2} d\sigma = 4\pi;$$

между тем, для возможности решения данной задачи, этот интеграл должен равняться нулю. По этой причине, мы заметим при рассмотрении внутренних задач функцию (17) функцией

$$\frac{\cos(RN)}{R^2} - \frac{4\pi}{S}, \quad (17')$$

где S обозначает площадь совокупности границ: тогда внутренняя задача станет возможной. Пусть $\Gamma^{(i)}$ — одна из гармонических функций, дающих это решение; все другие функции определяются формулой

$$\Gamma^{(i)} + C(\mathcal{M}),$$

где $C(\mathcal{M})$ — произвольная функция точки \mathcal{M} .

Положим

$$G^{(e)}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{R} + \Gamma^{(e)} \quad (18)$$

в случае внешней задачи, и

$$G^{(i)}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{R} + \Gamma^{(i)} + C(\mathcal{M}) \quad (18')$$

в случае задачи внутренней; в этом последнем случае подберем такую $C(\mathcal{M})$, чтобы выполнялось условие

$$\int_{(S_i)} G^{(i)}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) d\sigma = 0. \quad (19)$$

Определенные таким образом функции называются функциями Неймана. Они играют ту же роль в задаче Неймана, что и функция Грина в задаче Дирихле.

Каждая из них в области, где она определена, — гармоническая функция, кроме точки $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$, в которой она обращается в бесконечность.

На основании соотношения

$$\frac{d}{dn} \frac{1}{R} = - \frac{\cos(RN)}{R^2}$$

мы имеем для функции $G^{(e)}$:

$$\frac{dG_e^{(e)}}{dn} = \frac{d\Gamma_e^{(e)}}{dn} + \frac{d}{dn} \frac{1}{R} = \frac{\cos(RN)}{R^2} - \frac{\cos(RN)}{R^2} = 0.$$

Функция $G^{(i)}$ обладает следующим свойством:

$$\frac{dG_i^{(i)}}{dn} = \frac{d\Gamma_i^{(i)}}{dn} + \frac{d}{dn} \frac{1}{R} = \frac{\cos(RN)}{R^2} - \frac{4\pi}{S} - \frac{\cos(RN)}{R^2} = - \frac{4\pi}{S}.$$

Легко доказать, что функции $G^{(i)}$ и $G^{(e)}$ — симметричные функции точек \mathcal{M} и m , т. е. что

$$G(\mathcal{M}, m) = G(m, \mathcal{M}),$$

где положено

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = G(\mathcal{M}, m).$$

Изучим $G^{(i)}$. Опишем, как в § 1, вокруг точек \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 , как центров, сферы (σ_1) и (σ_2) радиуса ρ ; рассмотрим область, ограниченную поверхностями (S) , (σ_1) и (σ_2) .

Тождество Грина дает:

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \left(G_1^{(i)} \frac{dG_{2i}^{(i)}}{dn} - G_2^{(i)} \frac{dG_{1i}^{(i)}}{dn} \right) d\sigma &= \int_{(\sigma_1)} \left(G_1^{(i)} \frac{dG_{2i}^{(i)}}{dn} - G_2^{(i)} \frac{dG_{1i}^{(i)}}{dn} \right) d\sigma - \\ &- \int_{(\sigma_2)} \left(G_1^{(i)} \frac{dG_{2i}^{(i)}}{dn} - G_2^{(i)} \frac{dG_{1i}^{(i)}}{dn} \right) d\sigma = 0; \end{aligned}$$

здесь

$$G_1^{(i)} = G^{(i)}(\mathcal{M}_1, m), \quad G_2^{(i)} = G^{(i)}(\mathcal{M}_2, m).$$

Но нормальные производные $\frac{dG_{1i}^{(i)}}{dn}$, $\frac{dG_{2i}^{(i)}}{dn}$ равны на поверхности (S) числу $-\frac{4\pi}{S}$. Следовательно, первый интеграл в последнем тождестве равен

$$-\frac{4\pi}{S} \int_{(S)} (G_1^{(i)} - G_2^{(i)}) d\tau,$$

т. е. нулю — на основании (19). Игак, тождество принимает вид:

$$\int_{(\sigma_1)} \left(G_1^{(i)} \frac{dG_{2i}^{(i)}}{dn} - G_2^{(i)} \frac{dG_{1i}^{(i)}}{dn} \right) d\tau = \int_{(\sigma_2)} \left(G_2^{(i)} \frac{dG_{1i}^{(i)}}{dn} - G_1^{(i)} \frac{dG_{2i}^{(i)}}{dn} \right) d\tau. \quad (20)$$

Последнее равенство тождественно совпадает по виду с равенством (5) § 1; буквально повторяя рассуждения этого параграфа, мы выводим из них, что

$$G^{(i)}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = G^{(i)}(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_1).$$

Для внешней задачи сразу находим:

$$\frac{dG_{1e}^{(e)}}{dn} = 0, \quad \frac{dG_{2e}^{(e)}}{dn} = 0,$$

что нас непосредственно приводит к равенству (23).

З а м е ч а н и е. Мы исключили внутреннюю задачу для случая (Е) и внешнюю задачу для случая (J), единственно, из желания перегрузить изложение. Опираясь на теоремы гл. III, можно составить функции Неймана, годные и для отброшенных случаев. Достаточно соответствующим образом выбрать в (17') дополнительные члены согласно границам $(S^{(i)})$, чтобы удовлетворить условиям возможности задачи и прибавить к найденному решению член C , не зависящий от ξ , η , ζ и выбранный таким образом, чтобы для каждой из границ $S^{(i)}$ выполнялось условие (19).

Другие рассуждения сохраняют силу и для исключенных случаев.

Для функции Грина в § 1 были получены оценки (6) и (7). Покажем, что для функции Неймана $G^{(i)}(\mathcal{M}, m)$ имеет место неравенство

$$\int_{(D_i)} |G^{(i)}(\mathcal{M}, m)|^2 d\tau < A.$$

Для этого сначала докажем, что существует такая постоянная $c > 0$, что

$$\int_{(S)} |\mu| d\sigma < c_1 \int_{(S)} |f| d\sigma, \quad (21)$$

если μ есть плотность потенциала простого слоя, решающего внутреннюю задачу Неймана

$$\frac{dV_i}{dn} = f,$$

и удовлетворяющая условию

$$\int_{(S)} \mu d\sigma = 0.$$

Действительно, как мы видели в гл. III, плотность μ равна

$$\mu = \Sigma_n(1) + \int_{(S_0)} B_n(1, 0) \Sigma_n(0) d\sigma_0,$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \int_{(S)} |\mu| d\sigma &\leq \int_{(S)} |\Sigma_n(1)| d\sigma_1 + \int_{(S_0)} |\Sigma_n(0)| \left[\int_{(S_1)} |B_n(1, 0)| d\sigma_1 \right] d\sigma_0 \leq \\ &\leq c' \int_{(S)} |\Sigma_n(1)| d\sigma_1. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\int_{(S)} |\Sigma_n(1)| d\sigma_1 \leq c'' \int_{(S)} |f| d\sigma.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{(S_1)} \left| \int_{(S_0)} K(1, 0) f(0) d\sigma_0 \right| d\sigma_1 &\leq \int_{(S_1)} \left[\int_{(S_0)} |K(1, 0)| \cdot |f(0)| d\sigma_0 \right] d\sigma_1 = \\ &= \int_{(S_0)} |f(0)| \left[\int_{(S_1)} |K(1, 0)| d\sigma_1 \right] d\sigma_0 \leq c''' \int_{(S_0)} |f(0)| d\sigma_0 \end{aligned}$$

и аналогичные неравенства получаются для всех слагаемых, составляющих $\Sigma_n(1)$. Этим самым неравенство (21) доказано.

Пусть (ω) означает какую-либо область с диаметром δ , лежащую вместе с границей в (D_i) . Интеграл от квадрата $V[\mu]$ по (ω) тогда оценивается так:

$$\begin{aligned} \int_{(\omega)} |V[\mu]|^2 d\tau &= \int_{(\omega)} \left[\int_{(S_1)} \frac{\mu(1)}{r_{10}} d\sigma_1 \right] \left[\int_{(S_2)} \frac{\mu(2)}{r_{20}} d\sigma_2 \right] d\tau = \\ &= \int_{(S_1)} \mu(1) \left[\int_{(S_2)} \mu(2) \left(\int_{(\omega)} \frac{d\tau}{r_{10} r_{20}} \right) d\sigma_2 \right] d\sigma_1 \leqslant \\ &\leqslant 4\pi\delta \left[\int_{(S_1)} |\mu(1)| d\sigma_1 \right]^2 < 4\pi\delta c^2 \left[\int_{(S)} |f| d\sigma \right]^2, \end{aligned}$$

так как

$$\int_{(\omega)} \frac{d\tau}{r_{10} r_{20}} \leqslant \sqrt{\int_{(\omega)} \frac{d\tau}{r_{10}^2} \int_{(\omega)} \frac{d\tau}{r_{20}^2}} \leqslant \sqrt{\left(4\pi \int_0^\delta \frac{r^2 dr}{r^2} \right)^2} = 4\pi\delta.$$

Итак, имеем, обозначая через d_0 диаметр области (D_i) ,

$$\int_{(D_i)} |V[\mu]|^2 d\tau \leqslant 4\pi d_0 c^2 \left[\int_{(S)} |f| d\sigma \right]^2 = c_2 \left[\int_{(S)} |f| d\sigma \right]^2. \quad (22)$$

Аналогично убеждаемся, что

$$\int_{(S)} |V[\mu]| d\sigma < c_3 \int_{(S)} |f| d\sigma. \quad (23)$$

Функция $\Gamma^{(i)}(\mathcal{M}, m)$ определяется как решение внутренней задачи Неймана, причем

$$f = -\frac{4\pi}{S} + \frac{\cos(R, N)}{R^2},$$

и, следовательно,

$$\int_{(S)} |f| d\sigma \leqslant 4\pi + \int_{(S)} \frac{|\cos(R, N)|}{R^2} d\sigma.$$

Покажем, что интеграл в правой части ограничен. Действительно, если расстояние точки \mathcal{M} до (S) не меньше $\frac{d}{2}$ (d — радиус сферы Ляпунова), то интеграл не превосходит $\frac{4}{d^2} S$. Пусть расстояние δ точки \mathcal{M} до (S) меньше $\frac{d}{2}$ и m_0

точка (S) , ближайшая к \mathcal{M} . Как обычно, обозначим через (Σ) и (σ) части S внутри сферы Ляпунова и внутри сферы радиуса 2δ с центром в m_0 . Тогда расстояние точки \mathcal{M} до $(S - \Sigma)$ не меньше $\frac{d}{2}$ и интеграл по $(S - \Sigma)$ не превосходит $\frac{4}{d^2} S$. Площадь (σ) не превосходит $2\pi(2\delta)^2 = 8\pi\delta^2$, а R не меньше δ . Поэтому интеграл по (σ) не превосходит 8π .

Остается рассмотреть интеграл по $(\Sigma - \sigma)$. Обозначая через R_0 расстояние от m_0 до точки интегрирования, и считая R и R_0 направленными в \mathcal{M} и m_0 , получим:

$$|R \cos(R, N) - R_0 \cos(R_0, N)| = |\delta \cos(\delta, N)| \leq \delta$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{|\cos(R, N)|}{R^2} &< \frac{\delta}{R^3} + \frac{R_0}{R^3} |\cos(R_0, N)| < \frac{\delta}{\rho^3} + \\ &+ \frac{2\rho \cdot E\rho'}{\rho^3} = \frac{\delta}{\rho^3} + 2E\rho'^{-2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{(S-\Sigma)} \frac{|\cos(R, N)|}{R^2} d\sigma &< 2 \cdot 2\pi\delta \int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{\rho}{\rho^3} d\rho + 8\pi E \int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{d}{2}} \rho'^{-2} \rho d\rho = \\ &= 4\pi \left(1 - \frac{\delta}{d}\right) + \frac{8\pi E}{\lambda} (\alpha' - \delta') < 4\pi + \frac{8\pi E}{\lambda} d', \end{aligned}$$

и ограниченность интеграла от $|f|$ доказана.

На основании неравенств (22), (23) следует, что

$$\int_{(D_i)} |\Gamma^{(i)}(\mathcal{M}, m)|^2 d\tau < A, \quad (24)$$

$$\int_{(S)} |\Gamma^{(i)}(\mathcal{M}, m)| d\tau < B. \quad (25)$$

Интегрируя (18') по (S) и используя (19), найдем:

$$c(\mathcal{M}) \leq \frac{1}{S} \left| \int_{(S)} \frac{1}{R} d\sigma + \int_{(S)} \Gamma^{(i)} d\sigma \right| \leq \frac{1}{S} \left[B + \int_{(S)} \frac{1}{R} d\sigma \right] < C.$$

Так как интегралы

$$\int_{(D)} \frac{1}{R^2} d\tau, \quad \int_{(D)} |\Gamma^{(i)}(\mathcal{M}, m)|^2 d\tau, \quad \int_{(D)} c^2(\mathcal{M}) d\tau$$

ограничены числами, не зависящими от положения точки \mathcal{M} , то ограничен интеграл от квадрата $G^{(i)}(\mathcal{M}, m)$, что и требовалось доказать. Кроме того, имеем:

$$\int_{(\omega)} |G^{(i)}(\mathcal{M}, m)|^2 d\tau < c\delta,$$

где δ — диаметр области (ω) , лежащей в (D_i) и содержащей точку \mathcal{M} .

§ 6. Решение задачи Неймана

Мы займемся внутренней задачей. Пусть f — заданная на (S) непрерывная функция; будем искать функцию, гармоническую внутри (D_i) , нормальная производная которой равна f . Мы знаем, что эта задача может быть решена посредством потенциала простого слоя; обозначим этот потенциал через V .

На основании формул Грина мы можем написать:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{S})} V_i \frac{\cos(RN)}{R^2} d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{dV_i}{dn} \frac{d\sigma}{R} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{S})} V_i \frac{\cos(RN)}{R^2} d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} f \frac{d\sigma}{R}. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь, как и в § 1, R — расстояние между точками $\mathcal{M}(x, y, z)$ и $m(\xi, \eta, \zeta)$; функции V_i и f рассматриваются как функции ξ, η, ζ .

Тождество Грина нам дает:

$$\int_{(\dot{S})} \left(V_i \frac{d\Gamma_i^{(i)}}{dn} - \Gamma_i^{(i)} \frac{dV_i}{dn} \right) d\sigma = \int_{(S)} \left(V_i \frac{d\Gamma_i^{(i)}}{dn} - \Gamma_i^{(i)} f \right) d\sigma = 0.$$

Но на поверхности (S_1)

$$\frac{d\Gamma_i^{(i)}}{dn} = \frac{\cos(RN_1)}{R^2} - \frac{4\pi}{S},$$

вследствие чего последнее тождество принимает вид:

$$\int_{(\dot{S})} V_i \frac{\cos(RN_1)}{R^2} d\sigma - \int_{(\dot{S})} \Gamma_i^{(i)} f d\sigma - \frac{4\pi}{S} \int_{(\dot{S})} V_i d\sigma = 0,$$

или, что то же,

$$\int_{(\dot{S})} V_i \frac{\cos(RN)}{R^2} d\sigma - \int_{(\dot{S})} \Gamma_i^{(i)} f d\sigma - c = 0; \quad (27)$$

здесь c — константа, равная

$$\frac{4\pi}{S} \int_{(\dot{S})} V_i d\sigma.$$

Вычитая умноженное на $\frac{1}{4\pi}$ равенство (27) из (26), окончательно получаем:

$$V = \frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{S})} f \left\{ \frac{1}{R} + \Gamma^{(i)} \right\} d\sigma + c' = \frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{S})} f G^{(i)} d\sigma + c'.$$

Решив задачу Неймана в весьма частном случае для определения $G^{(i)}$, мы получаем решение общей задачи при помощи формулы

$$V = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} f G^{(i)} d\sigma + c',$$

где c' — некоторая постоянная.

В случае внешней задачи — решение проще. Переменив знак в формуле (26), повторив наши рассуждения и приняв во внимание, что

$$\frac{d\Gamma_e^{(e)}}{dn} = \frac{\cos(RN)}{R^2},$$

получим в следующем виде решение внешней задачи:

$$V = - \frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{S})} f G^{(e)} d\sigma.$$

§ 7. Задача о стационарной температуре

Предположим, что в некотором теле (D) тепло распределено таким образом, что температура остается в каждой точке постоянной во времени; это возможно лишь в том случае, когда температура на поверхности тела поддерживается неизменной,

Рассмотрим элемент $d\sigma$ поверхности, находящейся внутри тела или принадлежащей к его границе; можно считать $d\sigma$ плоским. Построим прямой цилиндр с направлением образующих по нормали к $d\sigma$. Полагая, что эта нормаль направлена от нижнего основания к верхнему, обозначим температуры нижнего и верхнего оснований через u_1 и u_2 (рис. 32).

Количество тепла, проходящее в цилиндре за время dt в направлении нормали, пропорционально разности $u_1 - u_2$, $d\sigma$ и dt ; оно обратно пропорционально высоте цилиндра; имеем:

$$\Delta q = k \frac{u_1 - u_2}{\Delta n} d\sigma dt.$$

Устремляя Δn к нулю, находим, что количество тепла, проходящее через элемент $d\sigma$ за время dt , равно

$$dq = -k \frac{du}{dn} d\sigma dt;$$

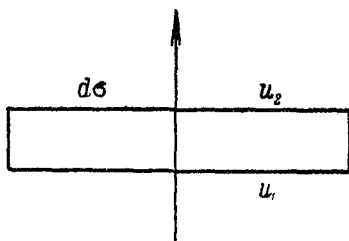


Рис. 32.

здесь u обозначает температуру, а k — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплопроводности. Мы будем предполагать тело однородным и, следовательно, k — постоянным. Количество тепла, проходящего через границу (σ) малого тела (ω) , находящегося внутри (D) , за время dt равно

$$- dt \cdot k \int_{(\sigma)} \frac{du}{dn} d\sigma.$$

Ввиду отсутствия теплового обмена между частицами тела, эта последняя величина должна равняться нулю; имеем:

$$\int_{(\sigma)} \frac{du}{dn} d\sigma = \int_{(\omega)} \Delta u d\tau = 0.$$

Отсюда, в силу произвольности области (ω) , заключаем:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (28)$$

Количество тепла, проходящего через элемент $d\sigma$ границы (D) , пропорционально разности температур между

точками границы и внешним пространством, в предположении, что это последнее имеет постоянную температуру u_0 . Таким образом, мы имеем на границе:

$$-k \frac{du_i}{dn} d\sigma dt = [\lambda(u - u_0) + f] d\sigma dt,$$

где λ — коэффициент излучения. Итак, температура на границе подчинена условию

$$\frac{du_i}{dn} = -h(u - u_0) + f, \quad (29)$$

где h — положительная постоянная.

Полагая, для упрощения,

$$V = u - u_0,$$

видим, что задача сводится к определению такой функции V , удовлетворяющей уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (28')$$

для которой на границе имеет место условие

$$\frac{dV_i}{dn} = -hV + f. \quad (29')$$

Желая найти V в виде потенциала простого слоя, положим:

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \frac{\rho(1)}{r_{10}} d\sigma_1. \quad (30)$$

Функция V удовлетворяет уравнению (28'). Учитывая равенство

$$\frac{dV_i}{dn} = \frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \frac{\rho(1) \cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + \rho(0),$$

находим из условия (29'), что

$$\rho(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \rho(1) \left\{ \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} + \frac{h}{r_{10}} \right\} d\sigma_1 + f(0),$$

т. е. что плотность $\rho(0)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\rho(0) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{(S_1)} \rho(1) \left\{ \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} + \frac{h}{r_{10}} \right\} d\sigma_1 + f(0) \quad (31)$$

при $\lambda = -1$.

Ядро уравнения (31) не ограничено; ясно, однако, что одно из его интегрированных ядер ограничено, так как к нему можно применить рассуждения § 4 (III). Легко доказать, что $\lambda = -1$ не принадлежит к числу характеристических чисел уравнения (31), или, другими словами, что данная задача имеет одно решение. В самом деле, если бы $\lambda = -1$ было характеристическим числом, то уравнение

$$\rho(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1)} \rho(1) \left\{ \frac{\cos(r_{10}N_0)}{r_{10}^2} + \frac{h}{r_{10}} \right\} d\sigma_1$$

имело бы отличное от тождественного нуля решение, и функция V удовлетворяла бы граничному условию

$$\frac{dV_i}{dn} = -hV.$$

Но, умножая это равенство на V и интегрируя его по (S) , получаем:

$$-\int_{(S)} hV^2 d\sigma = \int_{(S)} V \frac{dV_i}{dn} d\sigma = \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau,$$

последнее же равенство возможно лишь при $V \equiv 0$, так как оба его крайние члена имеют в противном случае разные знаки.

Таким образом доказано существование единственного решения задачи. Заметим, что все рассуждения остаются в силе, если считать h какой-либо положительной непрерывной функцией на (S) .

Доказав существование единственного решения, перейдем к эффективному построению решения. Для этого вернемся к уравнению (28') и положим

$$V = v + \frac{C}{h},$$

где C — постоянная. Подставляя в уравнение (28') и (29'), найдем:

$$\Delta v = 0 \text{ в } (D_i), \quad \frac{dv_i}{dn} + hv_i = f - C \text{ на } (S). \quad (32)$$

Выберем C так, чтобы

$$\int_{(\bar{S})} (f - C) d\sigma = 0, \quad (33)$$

и положим

$$v = v_0 + hv_1 + h^2v_2 + \dots \quad (34)$$

Подставляя это значение v в (33), мы получим систему равенств, позволяющих последовательно вычислять функции v_0, v_1, \dots :

$$\left. \begin{array}{l} \Delta v_0 = 0 \\ \Delta v_1 = 0 \\ \Delta v_2 = 0 \\ \dots \end{array} \right\} \text{ в } (D_i); \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dv_0}{dn} = f - C \\ \frac{dv_1}{dn} = -v_0 \\ \frac{dv_2}{dn} = -v_1 \\ \dots \end{array} \right\} \text{ на } (S).$$

Ввиду выполнения условия (33), возможно найти функцию v_0 ; найдя некоторое решение v_0 , можно к нему добавить такую константу c_0 , чтобы

$$\int_{(\bar{S})} v_0 d\sigma = 0.$$

Можно определить v_1 и прибавить к нему такую константу, чтобы

$$\int_{(\bar{S})} v_1 d\sigma = 0;$$

затем можно вычислить v_2 и т. д.

Остается выяснить, сходится ли ряд (34). Пользуясь функцией Ф. Неймана, мы последовательно находим:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{4\pi} \int_{(\bar{S}_1)} (f - C) G^{(i)} d\sigma_1 + c_0, \\ v_1 &= \frac{1}{4\pi} \int_{(\bar{S}_1)} v_0 G^{(i)} d\sigma_1 + c_1, \\ v_2 &= \frac{1}{4\pi} \int_{(\bar{S}_1)} v_1 G^{(i)} d\sigma_1 + c_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Обозначим через M_k максимум $|v_k|$. Легко находим:

$$\left| \frac{1}{4\pi} \int_{(S_1)} v_k G^{(i)} d\sigma_1 \right| < M_k \frac{1}{4\pi} \int_{(S_1)} |G^{(i)}| d\sigma_1 = M_k N; \quad (35)$$

здесь положено.

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{4\pi} \int_{(S_1)} |G^{(i)}| d\sigma_1 \leq \frac{1}{4\pi} \int_{(S_1)} \frac{1}{R} d\sigma_1 + \frac{1}{4\pi} \int_{(S_1)} |\Gamma_i| d\sigma_1 + \frac{1}{4\pi} |C(M)| S \leq \\ &\leq \frac{2}{4\pi} \int_{(S_1)} \frac{1}{R} d\sigma + \frac{2B}{4\pi} \leq \frac{2}{4\pi} \left(\max_{(S_1)} \int \frac{1}{R} d\sigma + B \right) = N_0. \end{aligned}$$

причем мы воспользовались неравенствами (25) и следующим за ним из § 5.

Возвратимся к неравенству (35); из равенства

$$\int_{(S)} v_{k+1} d\sigma = \int_{(S)} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{(S_1)} v_k G^{(i)} d\sigma_1 \right) d\sigma + C_{k+1} S = 0$$

имеем.

$$|C_{k+1}| S = \left| \int_{(S)} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{(S_1)} v_k G^{(i)} d\sigma_1 \right) d\sigma \right| < M_k N_0 S;$$

отсюда выводим, что

$$|C_{k+1}| < M_k N_0, \quad |v_{k+1}| < 2N_0 M_k.$$

Таким образом, легко находим, что

$$|v_{k+1}| < 2N_0 M_k < (2N_0)^2 M_{k-1} < \dots < (2N_0)^{k+1} M_0;$$

в этих неравенствах

$$M_0 < N_0 A, \quad (A = \max |f - C|)$$

Из всего предыдущего следует, что ряд (34) сходится, если

$$|h| < \frac{1}{2N_0} = \gamma_0,$$

и что этот ряд дает решение задачи при достаточно малых значениях h .

Вычислим теперь верхнюю границу V .

Предположим, что g — верхняя граница $|f|$, и положим

$$w_1 = V - \frac{g}{h}, \quad w_2 = V + \frac{g}{h}. \quad (36)$$

Функции (36) удовлетворяют условиям:

$$\left. \begin{aligned} \Delta w_1 &= 0 \\ \Delta w_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ в } (D_i); \quad \left. \begin{aligned} \frac{dw_1}{dn} + hw_1 + g - f &= 0 \\ \frac{dw_2}{dn} + hw_2 - g - f &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ на } (S).$$

Пусть m_1 и m_2 — точки, в которых функции w_1 и w_2 достигают соответственно, своего максимума и минимума; точки m_1 и m_2 расположены на (S) , так как w_1 и w_2 — гармонические функции; $\frac{dw_1}{dn}$ — положительна в m_1 и, в силу условия $g - f > 0$, в этой точке

$$w_1 < 0, \quad V < \frac{g}{h};$$

$\frac{dw_2}{dn}$ — отрицательна в m_2 и, в силу условия $g + f > 0$, в m_2

$$w_2 > 0, \quad V > -\frac{g}{h}.$$

Но V достигает максимума в m_1 и минимума в m_2 , так как $\frac{g}{h}$ — константа. Отсюда следует, что во всей области (D_i)

$$-\frac{g}{h} < V < \frac{g}{h}, \quad |V| < \frac{g}{h}.$$

Предположим, что $|h_0|$ меньше λ_0 , и пусть

$$h = h_0 + \eta;$$

в этом случае уравнения (28') и (29') принимают вид

$$\Delta V = 0 \text{ в } (D_i); \quad \frac{dV_i}{dn} + \eta V = f - h_0 V \text{ на } (S).$$

Положим

$$V = w_0 + \eta w_1 + \eta^2 w_2 + \dots \quad (37)$$

Находим для $w_0, w_1, w_2 \dots$ следующие условия.

$$\left. \begin{aligned} \Delta w_0 &= 0 \\ \Delta w_1 &= 0 \\ \Delta w_2 &= 0 \\ . & \end{aligned} \right\} \text{ в } (D_i); \quad \left. \begin{aligned} \frac{dw_0}{dn} + h_0 w_0 &= f \\ \frac{dw_1}{dn} + h_0 w_1 &= -w_0 \\ \frac{dw_2}{dn} + h_0 w_2 &= -w_1 \\ . & \end{aligned} \right\} \text{ на } (S).$$

Но ввиду независимости от f радиуса сходимости λ_0 ряда (34), и условия, что $|h_0|$ меньше λ_0 , мы можем определить все функции w_0, w_1, w_2, \dots ; в частности w_0 равна сумме ряда (34) при $h = h_0$.

Пусть g_k — верхняя граница $|w_k|$; согласно сделанному выше замечанию, имеем:

$$g_k < \frac{g_{k-1}}{h_0},$$

откуда следует, что

$$|w_k| < g_k < \frac{g}{h_0^k}.$$

Радиус сходимости ряда (37), следовательно, не менее h_0 , что позволяет вычислить решение для значений h , не превосходящих 2λ . Продолжая таким образом, мы получим решение для всего значения h .

§ 8. Функция Грина в задаче о стационарной температуре

Пусть, как в § 1, R — расстояние от точки \mathcal{M} (x, y, z) внутри (D) до точки m (ξ, η, ζ); найдем функцию точки m , гармоническую внутри (D) , которая удовлетворяет на поверхности (S) условию

$$\frac{d\Gamma}{dn} + h\Gamma + \frac{d}{dn}\frac{1}{R} + h\frac{1}{R} = 0. \quad (38)$$

Из предыдущих рассуждений следует, что можно найти функцию Γ , полагая функцию f равной

$$-\frac{d}{dn}\frac{1}{R} - h\frac{1}{R}.$$

Положим, далее

$$G(\mathcal{M}, m) = \frac{1}{R} + \Gamma.$$

Функция G удовлетворяет условию

$$\frac{dG}{dn} + hG = \frac{d}{dn}\frac{1}{R} + \frac{d\Gamma}{dn} + h\frac{1}{R} + h\Gamma = 0 \text{ на } (S). \quad (39)$$

Сравнивая ее с функцией (3) § 1 и повторяя буквально рассуждения § 1, можно убедиться, что функция $G(\mathcal{M}, m)$ — симметрическая. Достаточно проверить, что функции

$$G_1 = G(\mathcal{M}_1, m), \quad G_2 = G(\mathcal{M}_2, m)$$

удовлетворяют условию

$$\int_{(S)} \left(G_1 \frac{dG_2}{dn} - G_2 \frac{dG_1}{dn} \right) d\sigma = 0.$$

Но последнее равенство — непосредственное следствие условия (39).

Так же как для функции Ф. Неймана, можно доказать, что

$$\int_{(D)} [G(\mathcal{M}, m)]^2 d\tau < A. \quad (40)$$

Действительно, это следует из того, что для решения уравнения (31) § 7 при $\lambda = -1$ также можно установить неравенство

$$\int_{(S)} |\rho| d\sigma < C \int_{(S)} |f| d\sigma,$$

откуда, буквальным повторением рассуждений, проведенных для функции Ф. Неймана, получаем неравенство (40).

Предположим теперь, что потенциал простого слоя V удовлетворяет на (S) условию (29') § 7. В силу (39), имеем на (S) :

$$\begin{aligned} V \frac{dG}{dn} - G \frac{dV_i}{dn} &= V(-hG) - G(-hV + f) = \\ &= -Gf = -G(\mathcal{M}, m)f(m). \end{aligned}$$

Применяя гождество Грина к V и $G(\mathcal{M}, m)$ для части области (D_i) , лежащей вне шара (ω) малого радиуса ρ с центром в \mathcal{M} , получаем, учитывая, что лапласианы V и G в $(D - \omega)$ равны нулю:

$$\int_{(\sigma)} \left(V \frac{dG}{dn} - G \frac{dV}{dn} \right) d\sigma = - \int_{(S)} G(\mathcal{M}, m) f(m) d\sigma,$$

где (σ) — поверхность шара (ω) и нормаль на (σ) выбрана внешней.

Правая часть последнего равенства не зависит от выбора ρ , следовательно, не зависит и левая. Но левая часть по своей форме зависит от ρ , и можно доказать, так же как это было сделано при доказательстве симметричности функции Грина в § 1, что левая часть стремится при $\rho \rightarrow 0$ к

— $4\pi V(\mathcal{M})$. Следовательно, она равна — $4\pi V(\mathcal{M})$. Отсюда получаем:

$$V(\mathcal{M}) = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} G_i(\mathcal{M}, m) f(m) d\sigma.$$

§ 9. Функция Грина и уравнение Пуассона

Пусть функция $u(x, y, z)$ имеет в области (D_i) непрерывные вплоть до границы (S) производные первого и второго порядков. Такую функцию будем называть регулярной в (D_i) . Пусть, кроме того, функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет на границе (S) одному из следующих условий:

$$u = 0, \quad (\alpha)$$

$$\frac{du_i}{dn} + hu = 0, \quad (\beta)$$

$$\frac{du_i}{dn} = c \quad (c = \text{const}). \quad (\gamma)$$

Пусть $G(\mathcal{M}, m)$ означает функцию Грина для (D_i) , когда идет речь об условии (α) , функцию Ф. Неймана, когда идет речь об условии (γ) , и функцию Грина для стационарной температуры, когда речь идет об условии (β) . Пусть точка \mathcal{M} фиксирована в (D_i) и (ω) есть шар с центром в \mathcal{M} и настолько малого радиуса ρ , чтобы шар (ω) лежал полностью в (D_i) . К области $(D_i - \omega)$ и функциям $G(\mathcal{M}, m)$ и $u(m)$ применим формулу Грина:

$$\begin{aligned} \int_{(D_i - \omega)} (u \Delta G - G \Delta u) d\tau = \\ = \int_{(S)} \left(u \frac{dG}{dn} - G \frac{du}{dn} \right) d\sigma - \int_{(\sigma)} \left(u \frac{dG}{dn} - G \frac{du}{dn} \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Так как $\Delta G = 0$, а интеграл по (S) исчезает [кроме случая (γ)] в силу условий, которым удовлетворяют на (S) функции G и $u(m)$, получаем:

$$\begin{aligned} - \int_{(\sigma)} \left(u \frac{dG}{dn} - G \frac{du}{dn} \right) d\sigma = \\ = - \int_{(D - \omega)} G(\mathcal{M}, m) \Delta u d\tau + \left(\frac{4\pi}{S} \int_{(\sigma)} u d\sigma \right), \end{aligned}$$

причем последнее слагаемое имеем только в случае (γ) .

Как и в доказательстве симметричности функций Грина, легко убедиться, что левая часть последнего равенства при $\rho \rightarrow 0$ имеет пределом $4\pi u(\mathcal{M})$. Правая же часть имеет пределом интеграл по всей области (D_i) , которую будем обозначать просто (D) . Таким образом получаем

$$u(\mathcal{M}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{(D)} G(\mathcal{M}, m) \Delta u \, d\tau + \left(\frac{1}{S} \int_{(S)} u \, d\sigma \right), \quad (41)$$

причем второе слагаемое присутствует здесь только в случае (γ) . Следовательно, всякая регулярная в (D) функция $u(\mathcal{M})$, удовлетворяющая одному из условий (α) , (β) , (γ) , представляется формулой (41). Поэтому, если существует регулярное решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = -4\pi\varphi, \quad (42)$$

удовлетворяющее одному из условий (α) , (β) , (γ) , то это решение дается формулой

$$u(\mathcal{M}) = \int_{(D)} G(\mathcal{M}, m) \varphi(m) \, d\tau, \quad (43)$$

причем предполагается, что в случае (γ) решение удовлетворяет еще дополнительному условию

$$\int_{(S)} u \, d\sigma = 0. \quad (44)$$

Кроме того, из равенства

$$\int_{(D)} \Delta u \, d\tau = \int_{(S)} \frac{du}{dn} \, d\sigma$$

закключаем для случая (γ)

$$c = -\frac{4\pi}{S} \int_{(D)} \varphi(m) \, d\tau. \quad (45)$$

Из того, что всякое регулярное решение уравнения (42) [при условиях (α) , (β) , (γ)] представляется формулой (43), следует единственность регулярного решения уравнения (42) при условиях (α) , (β) , (γ) и в случае (γ) — дополнительных

условиях (44) и (45). Изучим интеграл (43) при различных предположениях о функции $\varphi(m)$.

Теорема 1. *Если φ ограничена и интегрируема в (D) , то интеграл (43) является функцией, которая имеет в (D) правильно непрерывные производные первого порядка и удовлетворяет на (S) условию в соответствии с выбранной функцией $G(\mathcal{M}, m)$; в случае (γ) эта функция удовлетворяет также условиям (44) и (45).*

Для доказательства введем в рассмотрение ньютонов потенциал $P[\varphi]$ с плотностью φ . Так как φ ограничена, то $P[\varphi]$ имеет правильно непрерывные во всем пространстве производные первого порядка.

Покажем, что имеет место следующая формула:

$$\int_{(D)} G(\mathcal{M}, m) \varphi(m) d\tau_m = P(\mathcal{M}) + \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \left[P_{(m)} \frac{dG}{dn} - \frac{dP}{dn} G \right] d\sigma. \quad (46)$$

Действительно, для $\Gamma(\mathcal{M}, m) = \Gamma(0, 1)$ имеем:

$$\Gamma(0, 1) = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \left[\frac{d\Gamma(0, 2)}{dn_2} \frac{1}{r_{12}} - \Gamma(0, 2) \frac{d}{dn_2} \frac{1}{r_{12}} \right] d\sigma_2.$$

Умножая последнее тождество на $\varphi(1)$, интегрируя по (D) , переставляя порядок интегрирования и учитывая, что

$$\int_{(D)} \frac{\varphi(1)}{r_{12}} d\tau_1 = P(2), \quad \int_{(D)} \varphi(1) \frac{d}{dn_2} \frac{1}{r_{12}} d\tau_1 = \frac{dP(2)}{dn_2}, \quad (47)$$

найдем после умножения на -1 :

$$-\int_{(D)} \Gamma(0, 1) \varphi(1) d\tau_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \left[\Gamma(0, 2) \frac{dP(2)}{dn_2} - P(2) \frac{d\Gamma(0, 2)}{dn_2} \right] d\sigma_2. \quad (48)$$

В § 6 (III) мы отмечали следующее равенство:

$$0 = \int_{(S)} \frac{1}{r_{12}} \frac{d}{dn_2} \frac{1}{r_{02}} d\sigma_2 - \int_{(S)} \frac{1}{r_{02}} \frac{d}{dn_2} \frac{1}{r_{12}} d\sigma_2.$$

Умножая последнее равенство на $\varphi(1)$ и интегрируя, получим после перестановки порядка интегрирования:

$$0 = \frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{S})} \left(P(2) \frac{d}{dn_2} \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{12}} \frac{dP(2)}{dn_2} \right) d\sigma_2. \quad (49)$$

Складывая почленно первое из равенств (47), равенства (48) и (49) и учитывая, что

$$G(0, 1) = \frac{1}{r_{01}} - \Gamma(0, 1),$$

получим:

$$\begin{aligned} & \int_{(\dot{D})} G(0, 1) \varphi(1) d\tau_1 = \\ & = P(0) + \frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{S})} \left\{ P(2) \frac{dG(0, 2)}{dn_2} - G(0, 2) \frac{dP(2)}{dn_2} \right\} d\sigma_2. \end{aligned} \quad (50)$$

Пусть V какой-либо потенциал простого слоя. Тогда имеем следующие тождества:

$$\begin{aligned} 0 &= V(0) - \frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{S})} \left\{ \frac{1}{r_{02}} \frac{dV(2)}{dn_2} - V(2) \frac{d}{dn_2} \frac{1}{r_{02}} \right\} d\sigma_2, \\ 0 &= \frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{S})} \left\{ \frac{dV(2)}{dn_2} \Gamma(0, 2) - V(2) \frac{d\Gamma(0, 2)}{dn_2} \right\} d\sigma_2, \end{aligned}$$

складывая которые, найдем:

$$0 = V(0) + \frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{S})} \left\{ V(2) \frac{dG(0, 2)}{dn_2} - \frac{dV(2)}{dn_2} G(0, 2) \right\} d\sigma_2. \quad (51)$$

Складывая (50) и (51) и обозначая

$$u(0) = P(0) + V(0), \quad (52)$$

получим:

$$\begin{aligned} & \int_{(\dot{D})} G(0, 1) \varphi(1) d\tau_1 = \\ & = u(0) + \frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{S})} \left\{ u(2) \frac{dG(0, 2)}{dn_2} - \frac{du(2)}{dn_2} G(0, 2) \right\} d\sigma_2. \end{aligned} \quad (53)$$

Легко показать, что можно выбрать такие потенциалы простого слоя V_α , V_β , V_γ , что $u_\alpha = P + V_\alpha$, $u_\beta = P + V_\beta$, $u_\gamma = P + V_\gamma$ будут удовлетворять на границе (S) соответственно условиям (α) , (β) и (γ) и в последнем случае также условиям (44) и (45).

Действительно, $P[\varphi] \in H(1, cA, \lambda)$ во всем пространстве, и поэтому $P[\varphi] \in H(1, c_1A, \lambda')$ на (S) и $\frac{dP}{dn} \in H(0, c_2A, \lambda')$ на (S) (здесь A верхняя грань для $|\varphi|$ и $0 < \lambda < 1$, $\lambda' < \lambda$).

На основании теоремы 1 § 19 (IV) гармоническая функция, обращающаяся в $-P[\varphi]$ на (S) , представима потенциалом простого слоя, который обозначим V_α . Там же было показано, что $V_\alpha \in H(1, c_3A, \lambda'')$ и, следовательно, $u_\alpha = P + V_\alpha$ имеет правильно непрерывные в (D) производные первого порядка. Кроме того, очевидно, $u_\alpha = 0$ на (S) . Считая в формуле (53) $u = u_\alpha$ и $G(0, 1)$ функцией Грина для задачи Дирихле, найдем:

$$\int_{(D)} G(0, 1) \varphi(1) d\tau_1 = u_\alpha(0),$$

и таким образом наше утверждение для интеграла (43) в случае (σ) доказано.

Переходим к случаю (β) . Интегральное уравнение (31) § 7 имеет, как мы видели, единственное решение. Нетрудно видеть, что решение ρ этого уравнения правильно непрерывно на (S) , если функция f правильно непрерывна на (S) . Полагая

$$f = -\left(\frac{dP}{dn} + hP\right),$$

получим, что потенциал простого слоя V_β , удовлетворяющий на (S) условию

$$\frac{dV_\beta}{dn} + hV_\beta = -\left(\frac{dP}{dn} + hP\right),$$

имеет в (D) правильно непрерывные производные первого порядка и, следовательно, то же заключение можно сделать относительно функции $u_\beta = P + V_\beta$. Кроме того, функция u_β удовлетворяет на (S) условию (β) . Если $G(0, 1)$ есть функция Грина для стационарной температуры, то

$$u_\beta \frac{dG}{dn} - \frac{du_\beta}{dn} G = u_\beta (-hG) - (-hu_\beta) G = 0,$$

и формула (53) дает:

$$\int_{(D)} G(0, 1) \varphi(1) d\tau_1 = u_3(0),$$

и утверждение для интеграла (43) в случае (β) доказано.

Заметим, что если в условии (β) предположить h не постоянной, а правильно непрерывной положительной функцией на (S) , то все наши заключения для случая (β) остаются в силе. Предполагая h лишь положительной и непрерывной функцией, мы в состоянии лишь доказать, что u_3 как сумма P и потенциала простого слоя с непрерывной плотностью удовлетворяет граничному условию (β), но первые производные u_3 , вообще говоря, не являются правильно непрерывными в (D) .

Переходим к случаю (γ). Умножая интеграл Гаусса

$$-4\pi = \int_{(S)} \frac{d}{dn_1} \frac{1}{r_{10}} d\sigma_1$$

на $\varphi(0)$, интегрируя по (D) и учитывая вторую из формул (47), получим:

$$\int_{(S)} \frac{dP}{dn} d\sigma = -4\pi \int_{(D)} \varphi(0) d\tau,$$

откуда следует, что

$$\int_{(S)} \left[\frac{dP}{dn} + \frac{4\pi}{S} \int_{(D)} \varphi d\tau \right] d\sigma = 0.$$

Следовательно, существует такой потенциал простого слоя V_γ , удовлетворяющий на (S) условию

$$\frac{dV_\gamma}{dn} = -\frac{dP}{dn} - \frac{4\pi}{S} \int_{(D)} \varphi d\tau.$$

Тогда функция $u_\gamma = P + V_\gamma$ удовлетворяет на (S) условию

$$\frac{du_\gamma}{dn} = -\frac{4\pi}{S} \int_{(D)} \varphi d\tau.$$

Кроме того, V_γ определяется с точностью до постоянного слагаемого, которое можно выбрать так, чтобы функция u

удовлетворяла на (S) условию (44). Если $G(0, 1)$ есть функция Ф. Неймана для внутренней задачи, то имеем:

$$u_\gamma \frac{dG}{dn} - \frac{du_\gamma}{dn} \cdot G = -\frac{4\pi}{S} u_\gamma + \frac{4\pi}{S} G(0, 1) \int_{(D)} \varphi d\tau$$

и очевидно, что интеграл по (S) от каждого слагаемого правой части последнего равенства равен нулю. Таким образом имеем на основании равенства (53)

$$\int_{(D)} G(0, 1) \varphi(1) d\tau_1 = u_\gamma(0).$$

Остается доказать, что V_γ , а следовательно, и u_γ имеют в (D) правильно непрерывные производные первого порядка. Это следует из теоремы 1 § 18 (III) так как $\frac{dP}{dn}$ правильно непрерывна на (S).

Таким образом наше утверждение относительно интеграла (43) полностью доказано.

Если φ правильно непрерывна в каждой области (D'), лежащей вместе с границей внутри (D), то u_α , u_β , u_γ имеют в каждой внутренней точке области (D) непрерывные производные второго порядка, удовлетворяют уравнению (42) и соответствующему условию на границе. Отсюда следует

Теорема 2. Если φ ограничена в (D) и правильно непрерывна в каждой области (D'), лежащей вместе с границей в (D), то уравнение (42) имеет единственные решения, имеющие в (D) непрерывные производные второго порядка и удовлетворяющие на (S) условиям (α), (β), (γ) [в случае (γ) также (44) и (45)].

Действительно, существование таких решений следует из предыдущих рассуждений. Единственность решения каждой из поставленных задач следует из того, что разность v любых двух решений каждой из задач является гармонической функцией, удовлетворяющей на (S) соответственно условиям (α), (β) и в случае (γ) условию

$$\frac{dv}{dn} = 0, \quad \int_{(S)} v d\sigma = 0.$$

Очевидно, для всех рассматриваемых случаев следует, что $v \equiv 0$, и теорема 2 доказана.

Предположим теперь, что $\varphi(m)$ не ограничена в (D) , но $\varphi(m)$ и $[\varphi(m)]^2$ интегрируемы в (D) . Будем говорить, что $\varphi(m)$ интегрируема с квадратом. Тогда из определения интеграла от неограниченной функции следует, что можно указать такую последовательность областей $\{(D_k)\}$ ($k = 1, 2, \dots$), содержащихся вместе с границей в (D) и таких, что а) каждая последующая область (D_{k+1}) содержит предыдущую (D_k) , б) в (D_k) $\varphi(m)$ непрерывна и ограничена,

$$\text{в) } \int_{(D_k)} |\varphi(m)|^2 d\tau \rightarrow \int_{(D)} \varphi^2 d\tau.$$

Пусть $\varphi_k(m)$ означает функцию, равную $\varphi(m)$ в (D_k) и нулю вне (D_k) . Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать n , что для всех $k > n$ имеем:

$$\int_{(D)} |\varphi - \varphi_k|^2 d\tau = \int_{(D-D_k)} |\varphi(m)|^2 d\tau < \varepsilon.$$

Покажем теперь, что интеграл (43) является функцией ограниченной и непрерывной в (D) , если $\varphi(m)$ интегрируема с квадратом.

Действительно, ограниченность его следует из неравенства Буняковского — Шварца:

$$\begin{aligned} |u(0)|^2 &= \left| \int_{(D)} G(0, 1) \varphi(1) d\tau_1 \right|^2 \leq \\ &\leq \int_{(D)} |G(0, 1)|^2 d\tau_1 \cdot \int_{(D)} |\varphi(1)|^2 d\tau_1 \leq A \cdot \int_{(D)} |\varphi(1)|^2 d\tau_1 = A \cdot \|\varphi\|^2. \end{aligned}$$

Функции $\varphi_k(m)$ ограничены, и поэтому

$$u_k(0) = \int_{(D)} G(0, 1) \varphi_k(1) d\tau_1 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

суть непрерывные функции в (D) . Покажем, что последовательность $u_k(0)$ сходится равномерно к интегралу (43). Действительно, применяя неравенство Буняковского — Шварца,

находим:

$$\begin{aligned}
 |u(0) - u_k(0)| &= \left| \int_{(D)} G(0, 1) [\varphi(1) - \varphi_k(1)] d\tau_1 \right| \leq \\
 &\leq \sqrt{\int_{(D)} G^2(0, 1) d\tau_1} \sqrt{\int_{(D)} (\varphi - \varphi_k)^2 d\tau} \leq \\
 &\leq \sqrt{A} \sqrt{\int_{|\varphi| > k} |\varphi|^2 d\tau} \leq \sqrt{A} \varepsilon, \quad (k > k_0),
 \end{aligned}$$

какова бы ни была точка \mathcal{M} из области (D) . Таким образом $u(\mathcal{M})$ есть предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций и, следовательно, есть непрерывная функция в (D) . Можно показать, что в случае (а) и $u(\mathcal{M})$ стремится к нулю, когда точка \mathcal{M} приближается к границе (S) .

Заметим, что если φ ограничена и непрерывна в (D) , то, как мы видели в § 15 (II), ньютонов потенциал с плотностью φ удовлетворяет уравнению Пуассона с обобщенным в смысле И. И. Привалова лапласианом Δ^*

$$\Delta^* P = -4\pi\varphi.$$

Очевидно, что этому же уравнению удовлетворяет тогда и функция $u(\mathcal{M})$, определяемая интегралом (43). Если φ интегрируема с квадратом, то, как было указано в § 24 (II), ньютонов потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона, где производные понимаются в смысле С. Л. Соболева. В этом же смысле удовлетворяет уравнению (42) и функция $u(\mathcal{M})$.

З а м е ч а н и е. Отметим без доказательства следующее утверждение: если непрерывная функция w такова, что $\Delta^* w \equiv 0$ (Δ^* — лапласиан в смысле И. И. Привалова), то w — гармоническая функция (И. И. Привалов, „Субгармонические функции“, гл. I, § 2). Если, кроме того, w удовлетворяет граничному условию (а) или (б), то $w \equiv 0$. Из этого следует, что уравнение

$$\Delta^* u = -4\pi\varphi,$$

где φ — непрерывная ограниченная функция в (D) , имеет единственное непрерывное решение и последнее дается формулой (43).

Поэтому, если функция $u(\mathcal{M})$, удовлетворяющая граничному условию (а) или (б) и имеющая внутри (D) непрерывные вторые производные, такова, что ее лапласиан Δu ограничен, то $u(\mathcal{M})$ представляется формулой (41). Аналогичное замечание справедливо для условия (γ).

Можно также доказать, что формула (41) имеет место для всякой непрерывной и ограниченной функции $u(\mathcal{M})$, удовлетворяющей соответствующему граничному условию и такой, что лапласиан ее интегрируем с квадратом.

Д о б а в л е н и е. Положим

$$\gamma_1(\mathcal{M}) = -\frac{1}{D} \int_{(D)} G(\mathcal{M}, m) d\tau,$$

где $G(\mathcal{M}, m)$ — функция Ф. Неймана для области (D_i) .

На основании предыдущего, $\gamma_1(\mathcal{M})$ внутри (D) удовлетворяет уравнению

$$\Delta \gamma_1 = \frac{4\pi}{D},$$

а на (S) условию

$$\frac{d\gamma_1}{dn} = \frac{4\pi}{S}, \quad \int_{(S)} \gamma_1 d\sigma = 0.$$

Образует новую функцию

$$G_1(\mathcal{M}, m) = G(\mathcal{M}, m) + \gamma_1(\mathcal{M}) + \gamma_1(m) - \frac{1}{D} \int_{(D)} \gamma_1(m) d\tau,$$

которую назовем модифицированной функцией Ф. Неймана.

Очевидно, $G_1(\mathcal{M}, m)$ симметрична и при фиксированной внутри (D) точке \mathcal{M} как функция точки m удовлетворяет внутри (D) (кроме точки \mathcal{M}) уравнению

$$\Delta G_1(\mathcal{M}, m) = \frac{4\pi}{D},$$

а на границе (S) условию

$$\frac{dG_1}{dn} = \frac{dG}{dn} + \frac{d\gamma_1}{dn} = -\frac{4\pi}{S} + \frac{4\pi}{S} = 0,$$

т. е.

$$\frac{dG_1}{dn} = 0. \quad (54)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \int_{(D)} G_1(\mathcal{M}, m) d\tau &= \int_{(D)} G(\mathcal{M}, m) d\tau + D\gamma_1(\mathcal{M}) + \\ &+ \int_{(D)} \gamma_1(m) d\tau - \int_{(D)} \gamma_1(m) d\tau = 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$\int_{(D)} G_1(\mathcal{M}, m) d\tau = 0. \quad (55)$$

Если $\varphi(m)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то

$$u(\mathfrak{M}) = \int_{(D)} G_1(\mathfrak{M}, m) \varphi(m) d\tau = \int_{(D)} G(\mathfrak{M}, m) \varphi(m) d\tau + \\ + \gamma_1(\mathfrak{M}) \int_{(D)} \varphi(m) d\tau + \int_{(D)} \gamma_1(m) \varphi(m) d\tau - \frac{1}{D} \int_{(D)} \gamma_1(m) d\tau \cdot \int_{(D)} \varphi(m) d\tau,$$

и, следовательно, $u(\mathfrak{M})$ удовлетворяет в (D) уравнению

$$\Delta u = -4\pi\varphi + \frac{4\pi}{D} \int_{(D)} \varphi(m) d\tau, \quad (56)$$

а на границе (S) условию

$$\frac{du}{dn} = -\frac{4\pi}{S} \int_{(D)} \varphi(m) d\tau + \frac{4\pi}{S} \int_{(D)} \varphi(m) d\tau = 0,$$

т. е.

$$\frac{du}{dn} = 0. \quad (57)$$

Если $\varphi(m)$ ограничена и интегрируема, то $u(\mathfrak{M})$ имеет правильно непрерывные в (D) производные первого порядка и удовлетворяет на (S) условию (57). Кроме того, интегрируя $u(\mathfrak{M})$ по (D) , переставляя порядок интегрирования, учитывая симметричность $G_1(\mathfrak{M}, m)$ и равенство (55), получим:

$$\int_{(D)} u(0) d\tau = \int_{(D)} \left[\int_{(D)} G_1(0, 1) \varphi(1) d\tau_1 \right] d\tau = \\ = \int_{(D)} \varphi(1) \left[\int_{(D)} G_1(0, 1) d\tau \right] d\tau_1 = 0,$$

т. е.

$$\int_{(D)} u(m) d\tau = 0. \quad (58)$$

Если $\varphi(m)$ подчинена условию

$$\int_{(D)} \varphi(m) d\tau = 0, \quad (59)$$

то $u(\mathfrak{M})$ удовлетворяет, в силу (56), уравнению (42) и условиям (57) и (58).

Повторяя буквально рассуждения начала этого параграфа, легко доказать, что всякое регулярное решение уравнения (42) при условиях (57) и (58) дается формулой (43), где $G(\mathfrak{M}, m)$ заменено $G_1(\mathfrak{M}, m)$.

В следующем параграфе условимся (γ) будем называть условие (57); при этом, когда будет идти речь об условии (57), будем пользоваться модифицированной функцией Ф. Неймана, обозначая ее просто $G(\mathfrak{M}, m)$.

§ 10. Задачи, относящиеся к уравнению $\Delta u = Lu + K$

Мы ограничимся в дальнейшем внутренними задачами. Пусть $u(x, y, z)$ есть регулярное решение уравнения

$$\Delta u = Lu + K, \quad (60)$$

где L и K непрерывные функции в (D) , причем L положительна.

Пусть удовлетворяет на (S) одному из следующих условий

$$u = f, \quad (\alpha')$$

$$\frac{du_i}{dn} = -hu + f, \quad (\beta')$$

$$\frac{du_i}{dn} = f, \quad (\gamma')$$

где f — заданная на (S) непрерывная функция.

Покажем, что не может быть двух различных регулярных функций u_1 и u_2 , удовлетворяющих уравнению (60) и одному из условий (α') , (β') , (γ') . Действительно, разность $v = u_1 - u_2$ была бы регулярной функцией, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta v = Lv, \quad (61)$$

а на границе (S) одному из условий

$$v = 0, \quad (\alpha)$$

$$\frac{dv}{dn} + hv = 0, \quad (\beta)$$

$$\frac{dv}{dn} = 0. \quad (\gamma)$$

Тогда имели бы

$$\int_{(D)} Lv^2 d\tau = \int_{(D)} v \Delta v d\tau = \int_{(S)} v \frac{dv}{dn} d\sigma - \int_{(D)} \sum \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 d\tau$$

и, следовательно,

$$\int_{(D)} \left\{ Lv^2 + \sum \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} d\tau = \int_{(S)} v \frac{dv}{dn} d\sigma. \quad (62)$$

В случае условий (α) и (γ) правая часть (62) равна нулю. Так как под интегралом в левой части (62) стоит неотрицательная функция, интеграл от которой равен нулю, то заключаем, что

$$V = \text{const} \text{ и } Lv^2 = 0, \text{ т. е. } V = 0 \text{ в } (D).$$

В случае условия (β) , в силу условия $h > 0$, имеем:

$$\int_{(S)} v \frac{dv}{dn} d\sigma = - \int_{(S)} h v^2 d\sigma \leq 0$$

и, следовательно, равенство (62) опять возможно лишь тогда, когда $v = 0$.

Таким образом, не может быть двух различных регулярных решений уравнения (60), удовлетворяющих одному из условий (α') , (β') , (γ') .

Пусть v_α и v_β гармонические функции внутри (D) , удовлетворяющие на (S) соответственно условиям

$$v_\alpha = f, \quad \frac{dv_\beta}{dn} = -h v_\beta + f.$$

Тогда разности $V_\alpha = u_\alpha - v_\alpha$ и $V_\beta = u_\beta - v_\beta$ удовлетворяют на границе (S) условиям

$$V_\alpha = 0, \tag{\alpha}$$

$$\frac{dV_\beta}{dn} = -h V_\beta \tag{\beta}$$

и внутри (D) уравнению

$$\begin{aligned} \Delta V &= \Delta u = Lu + K = L(V + v) + K = \\ &= LV + (K + Lv) = LV + F, \end{aligned}$$

т. е.

$$\Delta V = LV + F, \tag{63}$$

где

$$F = K + Lv.$$

Если решение $V(x, y, z)$ есть регулярная функция, то на основании предыдущего параграфа заключаем, что

$$V(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_{(D)} G(M, m) L(m) V(m) d\tau + \Phi(M), \tag{64}$$

где

$$\Phi(\mathcal{M}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{(D)} G(\mathcal{M}, m) F(m) d\tau, \quad (65)$$

т. е. V является решением интегрального уравнения с ядром $G(\mathcal{M}, m)L(m)$.

Предполагая L ограниченным, изучим второе интегрированное ядро полученного интегрального уравнения

$$L(m) \int_{(D)} G(\mathcal{M}, m_1) L(m_1) G(m_1, m) d\tau_1 = L(m) G_2(\mathcal{M}, m).$$

Так как интеграл от квадрата $G(\mathcal{M}, m)$ ограничен, то $G_2(\mathcal{M}, m)$ есть непрерывная ограниченная функция точек \mathcal{M} и m , так как мы видели, что интеграл (43) § 9 есть функция непрерывная, если $\varphi(m)$ интегрируема с квадратом. Поэтому к интегральному уравнению (64) применимы известные теоремы Фредгольма. Если $\Phi(\mathcal{M})$ ограничена, то и решение, если оно существует, также ограничено.

Предполагая L и Φ правильно непрерывными в (D) , покажем, что всякое решение интегрального уравнения (64), где $\Phi(\mathcal{M})$ определится формулой (65), является регулярным решением (63) при граничном условии (α) или (β) в соответствии с выбором функции $G(\mathcal{M}, m)$.

Действительно, так как V есть ограниченное решение интегрального уравнения, то первое слагаемое правой части (64) есть функция, имеющая непрерывные производные первого порядка и удовлетворяющая соответствующему граничному условию. Второе слагаемое есть регулярное решение уравнения

$$\Delta u = F$$

и удовлетворяет граничному условию.

Из уравнения (64) следует, что $V(\mathcal{M})$ имеет первые производные и удовлетворяет граничному условию, как сумма двух функций, обладающих теми же свойствами. Таким образом, LV правильно непрерывна в (D) , и поэтому первое слагаемое правой части (64) удовлетворяет граничному условию, является регулярной функцией, лапласиан которой равен LV . Отсюда и следует наше утверждение. Отсюда также следует, что всякое интегрируемое с квадратом реше-

ние однородного интегрального уравнения

$$V(\mathcal{M}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{(D)} G(\mathcal{M}, m) L(m) V(m) d\tau \quad (66)$$

тождественно равно нулю.

Действительно, предполагая V интегрируемой с квадратом, а L ограниченной, заключаем, что LV также интегрируема с квадратом, а поэтому функция V на основании замечания § 9 непрерывна и ограничена. Отсюда, как и раньше, заключаем, что V есть регулярное решение уравнения (61) при граничном условии (α) или (β) . Как мы видели, такое решение тождественно равно нулю.

Отсюда следует, что для интегрального уравнения

$$V(\mathcal{M}) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_{(D)} G(\mathcal{M}, m) L(m) V(m) d\tau + \Phi(\mathcal{M}) \quad (67)$$

число $\lambda = -1$ не является характеристическим числом.

Перейдем к исследованию задачи с граничным условием (γ') . Пусть v_γ какая-либо функция, удовлетворяющая граничному условию (γ') , имеющая внутри (D) непрерывные производные второго порядка. Такой функцией, например, является

$$v_\gamma = v - P,$$

где P — ньютонов потенциал с постоянной плотностью $c = \frac{1}{4\pi D} \int_{(S)} f d\sigma$, а v — гармоническая функция, удовлетворяющая на (S) условию

$$\frac{dv_i}{dn} = f + \frac{dP}{dn}.$$

Функцию v найти можно, так как

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \left(f + \frac{dP}{dn} \right) d\sigma &= \int_{(S)} f d\sigma + \int_{(S)} \frac{dP}{dn} d\sigma = \\ &= \int_{(S)} f d\sigma + \int_{(D)} \Delta P d\tau = \int_{(S)} f d\sigma - 4\pi c D = 0. \end{aligned}$$

Тогда функция

$$V_\gamma = u_\gamma - v_\gamma$$

удовлетворяет граничному условию (γ)

$$\frac{dV_\gamma}{dn} = 0$$

и уравнению (63), где

$$F = K + Lv_\gamma + \frac{1}{D} \int_{(\bar{S})} f d\sigma.$$

Допустим, что V есть регулярное решение уравнения (63) при условии (γ) на границе. Тогда имеем:

$$\int_{(\bar{D})} \Delta V d\tau = \int_{(\bar{S})} \frac{dV}{dn} d\sigma = 0$$

и, следовательно,

$$\int_{(\bar{D})} (LV + F) d\tau = 0. \quad (68)$$

Поэтому, на основании результатов предыдущего параграфа, заключаем, что V удовлетворяет интегральному уравнению (64), в котором $G(\mathcal{M}, m)$ есть модифицированная функция Ф. Неймана. Так же как для условий (α) и (β) , убеждаемся, что $\lambda = -1$ не является характеристическим числом уравнения (67) и интегральное уравнение (64) имеет единственное решение. Итак, приходим к заключению, что уравнение (63) для каждого из уравнений (α) , (β) , (γ) имеет единственное решение (если предположить, что L и F правильно непрерывны).

Предполагая L правильно непрерывной и положительной функцией в (D) , мы показали, что $\lambda = -1$ не является характеристическим числом интегрального уравнения (67). Покажем, что требование правильной непрерывности излишне. Предполагая, что L ограничена, положительна и интегрируема, докажем, что однородное уравнение (66) имеет лишь нулевое решение.

Действительно, при сделанных предположениях о L можно указать такую последовательность правильно непрерывных в (D) функций L_k , что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{(\bar{D})} (L - L_k)^2 d\tau = 0.$$

Рассмотрим последовательность функций

$$V_k = - \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} G(\mathcal{M}, m) L_k(m) V(m) d\tau,$$

где $V(m)$ — решение рассматриваемого однородного уравнения (66).

Из уравнения (66) следует, что V ограничена и имеет ограниченные первые производные, а следовательно, V_k регулярна и удовлетворяет уравнению

$$\Delta V_k = L_k V$$

и соответствующему условию на границе. Умножая обе части последнего уравнения на V_k и интегрируя, легко находим:

$$\int_{(D)} \left\{ L_k V V_k d\tau + \sum \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)^2 \right\} d\tau \leq 0.$$

Но V_k и первые производные от V_k стремятся равномерно к V и соответствующим производным от V . Отсюда следует, как и прежде, равенство нулю решения V однородного уравнения (66).

Заметим, что сейчас, по существу, доказано утверждение: характеристические числа интегрального уравнения

$$V(\mathcal{M}) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_{(D)} G(\mathcal{M}, m) L(m) V(m) d\tau$$

не отрицательны. Действительно, если $\lambda < 0$, то $\lambda L = -|\lambda| L$ и, как мы сейчас убедились, однородное уравнение (66), где L заменено на $|\lambda| L$, имеет только нулевое решение.

Так как рассматриваемое интегральное уравнение является уравнением типа Шмидта [ядро есть произведение симметричной функции $G(\mathcal{M}, m)$ на положительную функцию $L(m)$], то все характеристические числа вещественны. Так как они не отрицательны, то они все положительны. Если L правильно непрерывна, то фундаментальные функции являются решениями уравнения

$$\Delta V + \lambda L V = 0$$

и удовлетворяют на границе (S) условию, соответствующему выбранной функции $G(\mathcal{M}, m)$. Заметим, что в случае условия (γ) функция $V = \text{const}$ удовлетворяет граничному условию

и уравнению при $\lambda = 0$. Эту функцию будем также называть фундаментальной функцией для характеристического числа 0 [и условия (γ)].

§ 11. Лемма

В интегральном уравнении (67) § 10 будем вместо $\frac{L}{4\pi}$ писать L . Отыскивая методом последовательных приближений решение интегрального уравнения

$$V(\mathcal{M}) = \lambda \int_{(D)} G(\mathcal{M}, m) L(m) V(m) d\tau + f(\mathcal{M}),$$

приходим к ряду

$$V = v_0 + \lambda v_1 + \dots + \lambda^k v_k + \dots, \quad (69)$$

где

$$v_0 = f,$$

$$v_k(\mathcal{M}) = \int_{(D)} G(\mathcal{M}, m) L(m) v_{k-1}(m) d\tau, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Пусть l есть радиус сходимости ряда (69).

Лемма. Имеет место неравенство

$$\frac{\int_{(D)} L(\mathcal{M}) \left(\int_{(D)} G(\mathcal{M}, m) L(m) f(m) d\tau_m \right)^2 d\tau_{\mathcal{M}}}{\int_{(D)} L(m) (f(m))^2 d\tau} \leq \frac{1}{l^2}. \quad (70)$$

Для доказательства заметим, что радиус сходимости ряда

$$v_0 + \lambda^2 v_2 + \dots + \lambda^{2k} v_{2k} + \dots$$

не меньше l .

Умножая последний ряд на $L v_0$ и интегрируя по (D) , заключим, что радиус сходимости l_1 степенного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2k} \int_{(D)} L v_0 v_{2k} d\tau \quad (71)$$

не меньше l .

Обозначим

$$I_{k,n} = \int_{(D)} L v_k v_n d\tau, \quad J_k = I_{k,k}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_{k,n} &= \int_{(D)} L(\mathcal{M}) v_k(\mathcal{M}) \left(\int_{(D)} L(m) G(\mathcal{M}, m) v_{n-1}(m) d\tau_m \right) d\tau_{\mathcal{M}} = \\ &= \int_{(D)} L(m) v_{n-1}(m) \left(\int_{(D)} L(\mathcal{M}) v_k(\mathcal{M}) G(\mathcal{M}, m) d\tau_{\mathcal{M}} \right) d\tau_m = \\ &= \int_{(D)} L(m) v_{n-1}(m) v_{k+1}(m) d\tau_m = I_{k+1, n-1}, \end{aligned}$$

откуда следует

$$J_k = I_{k,k} = I_{k-1, k+1} = I_{k-2, k+1} = \dots = I_{0, 2k} = \int_{(D)} L v_0 v_{2k} d\tau,$$

после чего ряд (71) примет вид:

$$\sum_{k=0}^{\infty} J_k \lambda^{2k}. \quad (72)$$

Мы покажем, что

$$\frac{J_0}{J_1} \leq \frac{1}{l_1^2} \leq \frac{1}{l^2}, \quad (73)$$

чем и будет доказана лемма, так как левая часть неравенства (70) есть отношение J_0 к J_1 .

Мы будем считать f интегрируемой с квадратом, так как предположение непрерывности f никакого упрощения в доказательство не вносит. При этом L будем считать ограниченной положительной.

Прежде всего покажем, что ядро $G(\mathcal{M}, m)$ полное, т. е. оно таково, что из тождества

$$\int_{(D)} G(\mathcal{M}, m) \varphi(m) d\tau \equiv 0,$$

где $\varphi(m)$ функция, интегрируемая с квадратом, следует $\varphi \equiv 0$ [если $G(\mathcal{M}, m)$ модифицированная функция Ф. Неймана, то $\varphi \equiv \text{const}$].

Действительно, пусть $\psi(\mathcal{M})$ регулярная в (D) функция, обращающаяся в нуль вне некоторой произвольной области (D') , лежащей вместе с границей в (D) . Тогда $\psi(\mathcal{M})$ удовлетворяет каждому из условий (α) , (β) и (γ) на (S) .

Умножая написанное выше тождество на $\Delta\psi(\mathcal{M})$ и интегрируя по (D) , меняя порядок интегрирования и учитывая, что

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{(D)} G(\mathcal{M}, m) \Delta\psi(\mathcal{M}) d\tau_{\mathcal{M}} = \psi(m)$$

в случаях (α) и (β) и

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{(D)} G(\mathcal{M}, m) \Delta\psi(\mathcal{M}) d\tau_{\mathcal{M}} = \psi(\mathcal{M}) - \frac{1}{D} \int_{(D)} \psi(m) d\tau$$

в случае (γ) , получим:

$$\int_{(D)} \varphi(m) \psi(m) d\tau = 0$$

в случаях (α) и (β) ,

$$\int_{(D)} \psi(m) \left(\varphi(m) - \frac{1}{D} \int_{(D)} \varphi(m) d\tau \right) d\tau = 0$$

в случае (γ) .

Ввиду произвольности функции $\psi(m)$ отсюда следует, что в случаях (α) и (β)

$$\varphi(m) \equiv 0,$$

а в случае (γ)

$$\varphi(m) - \frac{1}{D} \int_{(D)} \varphi(m) d\tau \equiv 0,$$

т. е.

$$\varphi(m) \equiv \frac{1}{D} \int_{(D)} \varphi(m) d\tau \equiv \text{const.}$$

Мы в дальнейшем будем предполагать, что f_i не равно тождественно нулю. Тогда в случаях (α) и (β)

$$v_1 = \int_{(D)} G(\mathcal{M}, m) L(m) f(m) d\tau \neq 0,$$

и, продолжая далее, убедимся, что $v_k \neq 0$, ($k = 1, 2, \dots$). Аналогично предполагая, что $Lf \neq \text{const}$, найдем в случае (γ) $v_1 \neq 0$. Так как в этом случае также имеем

$$\int_{(D)} v_1 d\tau = 0,$$

то v_1 принимает значения разных знаков, и, следовательно Lv_1 также принимает значения разных знаков и не может быть постоянной величиной. Отсюда находим последовательно, что $Lv_k \neq \text{const}$, ($k = 1, 2, \dots$).

Из этих рассуждений следует, что

$$J_k = \int_{(D)} Lv_k^2 d\tau \neq 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Выше было доказано, что

$$J_k = I_k, \quad k = I_{k-1}, \quad k+1.$$

Применяя неравенство Буняковского — Шварца, находим:

$$I_{k-1, k+1}^2 \left(\int_{(D)} Lv_{k+1} v_{k-1} d\tau \right)^2 \leq \int_{(D)} Lv_{k+1}^2 d\tau \int_{(D)} Lv_{k-1}^2 d\tau = J_{k+1} J_{k-1}$$

и, используя предыдущее равенство, получаем:

$$J_k^2 \leq J_{k+1} \cdot J_{k-1}.$$

Так как $J_k \neq 0$, то заключаем, что

$$\frac{J_k}{J_{k-1}} \leq \frac{J_{k+1}}{J_k},$$

т. е. отношение

$$\frac{J_k}{J_{k-1}}$$

не убывает и, следовательно, имеет при $k \rightarrow \infty$ конечный или бесконечный предел, равный обратной величине квадрата радиуса l_1 сходимости ряда (72).

Все эти отношения не превосходят указанного предела, и для $k = 1$ получаем неравенство (73); лемма доказана.

§ 12. Замечания относительно полюсов решения интегрального уравнения

Пусть

$$\frac{\mathcal{D}(\lambda, \mathfrak{N}(\lambda, m))}{\mathcal{D}(\lambda)} \quad (74)$$

резольвента рассматриваемого интегрального уравнения для второго итерированного ядра. Так как уравнение принадлежит к типу Шмидта, все полюсы резольвенты простые. Мы будем предполагать, что резольвента является несократимой дробью.

Решая интегральное уравнение (67) § 10, находим:

$$V = \frac{\mathcal{D}_1(\lambda, M)}{\mathcal{D}_1(\lambda)}, \quad (75)$$

где $\mathcal{D}_1(\lambda)$ получается из $\mathcal{D}(\lambda)$ делением на некоторую целую функцию. Функция $\mathcal{D}_1(\lambda)$ также не имеет кратных корней.

Мы видели, что характеристические числа рассматриваемого интегрального уравнения положительны. Пусть

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_n, \dots \quad (76)$$

характеристические числа, расположенные в порядке неубывания, причем в этой последовательности каждое число повторяется столько раз, сколько ему отвечает линейно независимых фундаментальных функций. Пусть

$$V_1, V_2, \dots, V_k, \dots, V_n, \dots \quad (77)$$

последовательность соответствующих фундаментальных функций, которые предположим ортогональными и нормированными, т. е. такими, что

$$\begin{aligned} \int_{(D)} \bar{L}(0) V_k(0) V_n(0) d\tau &= 0, \quad \text{если } k \neq n, \\ \int_{(D)} \bar{L}(0) V_k^2(0) d\tau &= 1, \quad \left(\bar{L} = \frac{1}{4\pi} L \right). \end{aligned}$$

Предположим, что функция f удовлетворяет n условиям:

$$\int_{(D)} \bar{L} f V_k d\tau = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad (78)$$

мы покажем, что в этом случае числа

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

не могут быть полюсами дроби (75).

Ясно, что дробь (75) удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{D}_1(\lambda, 0) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_{(\mathcal{D}_1)} L(1) G(1, 0) \mathcal{D}_1(\lambda, 1) d\tau_1 + \mathcal{D}_1(\lambda) f(0); \quad (79)$$

если λ_k — корень $\mathcal{D}_1(\lambda)$, то имеем:

$$\mathcal{D}_1(\lambda_k, 0) = \frac{\lambda_k}{4\pi} \int_{(\mathcal{D}_1)} L(1) G(1, 0) \mathcal{D}_1(\lambda_k, 1) d\tau_1;$$

это показывает, что $\mathcal{D}_1(\lambda_k, 0)$ — одна из фундаментальных функций — линейная комбинация функций (77).

Если $k \leq n$, то, на основании (78):

$$\int_{(D)} L(0) f(0) \mathcal{D}_1(\lambda_k, 0) d\tau = 0.$$

Умножая обе части (79) на $L(0) \mathcal{D}_1(\lambda_k, 0)$ и интегрируя произведение по (D) , получаем:

$$\begin{aligned} & \int_{(D)} L(0) \mathcal{D}_1(\lambda_k, 0) \mathcal{D}_1(\lambda, 0) d\tau = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi} \int_{(D)} L(0) \mathcal{D}_1(\lambda_k, 0) \left(\int_{(D_1)} L(1) G(1, 0) \mathcal{D}_1(\lambda, 1) d\tau_1 \right) d\tau = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi} \int_{(D_1)} L(1) \mathcal{D}_1(\lambda, 1) \left(\int_{(D)} L(0) G(1, 0) \mathcal{D}_1(\lambda_k, 0) d\tau \right) d\tau_1 = \\ &= \frac{\lambda}{\lambda_k} \int_{(D_1)} L(1) \mathcal{D}_1(\lambda, 1) \mathcal{D}_1(\lambda_k, 1) d\tau_1, \end{aligned}$$

откуда, далее

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \int_{(D)} L(0) \mathcal{D}_1(\lambda_k, 0) \mathcal{D}_1(\lambda, 0) d\tau = 0.$$

Если $\lambda \neq \lambda_k$, то имеем:

$$\int_{(D)} L(0) \mathcal{D}_1(\lambda_k, 0) \mathcal{D}_1(\lambda, 0) d\tau = 0;$$

но последний интеграл — целая функция λ : если она равна нулю при $\lambda \neq \lambda_k$, то она равняется нулю и при $\lambda = \lambda_k$. Таким образом,

$$\int_{(D)} L(0) \mathcal{D}_1^2(\lambda_k, 0) d\tau = 0,$$

откуда находим: $\mathcal{D}_1(\lambda_k, 0) = 0$; это невозможно, так как дробь (75) несократима. Отсюда следует, что λ_k , ($k = 1, 2, \dots, n$) не могут быть полюсами дроби (75).

§ 13. Замкнутость последовательности фундаментальных функций в некотором частном функциональном пространстве

Мы будем говорить, что последовательность 77 § 12 замкнута в пространстве функций, обладающих данными свойствами, если для любой функции $f(0)$ этого пространства имеет место равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L(0) f^2(0) d\tau &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L(0) V_k(0) f(0) d\tau \right]^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \end{aligned} \quad (80)$$

в котором

$$a_k = \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L(0) V_k(0) f(0) d\tau.$$

Ввиду соотношений

$$0 < \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L(0) \left(f - \sum_{k=1}^n a_k V_k \right)^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L(0) f^2(0) d\tau - \sum_{k=1}^n a_k^2,$$

разность

$$\frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L(0) f^2(0) d\tau - \sum_{k=1}^n a_k^2$$

неотрицательна для каких угодно функций f , интегрируемых с квадратом. Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \leq \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L(0) f^2(0) d\tau$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \leq \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L(0) f^2(0) d\tau.$$

Последнее неравенство называется неравенством Бесселя.

Пусть $h(0)$ некоторая функция с интегрируемым квадратом. Положим

$$f(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L(1) G(0, 1) h(1) d\tau_1, \quad (81)$$

и покажем, что последовательность (77) § 12 замкнута в пространстве функций $f(0)$ вида (81). Полагая

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= \sum_{k=1}^{k=n} a_k V_k(0) + \rho_n(0), \\ a_k &= \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L(0) h(0) V_k(0) d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

мы получим:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{4\pi} \int_{(D_1)} L(1) G(1, 0) \left(\sum_{k=1}^{k=n} a_k V_k(1) \right) d\tau_1 + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{(D_1)} L(1) G(1, 0) \rho_n(1) d\tau_1 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{a_k}{k_k} V_k(0) + R_n(0) = \\ &= \sum_{k=1}^{k=n} b_k V_k(0) + R_n(0). \end{aligned} \quad (83)$$

Здесь

$$R_n(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L(1) G(1, 0) \rho_n(1) d\tau_1,$$

$$b_k = \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L(0) f(0) V_k(0) d\tau = \frac{a_k}{k_k}.$$

Умножим обе части (82) на $L(0, V_m(0))$ ($m = 1, 2, \dots, n$) и проинтегрируем полученное произведение по (D) . Ввиду ортогональности и нормированности последовательности V_k ,

мы получим:

$$\begin{aligned} & \int_{(D)} L(0) h(0) V_m(0) d\tau = \\ & = \sum_{k=1}^{k=n} a_k \int_{(D)} L(0) V_k(0) V_m(0) d\tau + \int_{(D)} L(0) \rho_n(0) V_m(0) d\tau = \\ & = 4\pi a_m + \int_{(D)} L(0) \rho_n(0) V_m(0) d\tau, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\int_{(D)} L(0) \rho_n(0) V_m(0) d\tau = 0, \quad (m = 1, 2, \dots, n). \quad (84)$$

Образуем, как в § 11, ряд

$$V = v_0 + \lambda v_1 + \dots + \lambda^k v_k + \dots, \quad (85)$$

который соответствует уравнению

$$V(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{(D_1)} L(1) G(1, 0) V(1) d\tau_1 + \rho_n(0);$$

согласно § 12, радиус сходимости этого ряда больше $|\lambda_n|$; в самом деле, на основании равенств (84), $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ не могут быть полюсами для $V(0)$.

Согласно лемме § 11,

$$\begin{aligned} & \frac{\int_{(D)} L(0) \left(\int_{(D_1)} L(1) G(1, 0) \rho_n(1) d\tau_1 \right)^2 d\tau}{(4\pi)^2 \int_{(D)} L(0) \rho_n^2(0) d\tau} = \\ & = \frac{\int_{(D)} L(0) R_n^2(0) d\tau}{(4\pi) \int_{(D)} L(0) \rho_n^2(0) d\tau} < \frac{1}{|\lambda_n|^2}. \quad (86) \end{aligned}$$

Следует различать два случая:

1°. Если число N характеристических чисел ограничено, то ряд (85) сходится при любом λ , когда $n \geq N$. Радиус

сходимости ряда тогда равен $\neq \infty$; неравенство (86) нам дает:

$$\int_{(D)} L(0) R_n^2(0) d\tau = 0, \quad R_n = 0$$

и

$$f(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L(1) G(1, 0) h(1) d\tau = b_1 V_1(0) + b_2 V_2(0) + \dots + b_N V_N(0).$$

2°. Если число характеристических чисел бесконечно, то, ввиду мероморфности функции V , $|\lambda_n| \rightarrow \infty$, при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(D)} L(0) R_n^2(0) d\tau = 0.$$

Ввиду соотношения

$$\int_{(D)} L(0) R_n^2(0) d\tau = \int_{(D)} L(0) f^2(0) d\tau - 4\pi \sum_{k=1}^{k=n} b_k^2,$$

полученное равенство может быть написано в следующей форме:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L(0) f^2(0) d\tau = \sum_{k=1}^{(\infty)} b_k^2 = \sum_{k=1}^{(\infty)} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L(0) V_k(0) f(0) d\tau \right)^2,$$

и замкнутость последовательности фундаментальных функций в классе функций, представимых интегралом (81), доказана.

Пусть f регулярная в (D) функция, удовлетворяющая на (S) граничному условию, соответствующему выбранной функции $G(\mathcal{M}, m)$ [в случае условия (γ) предполагаем также, что интеграл по (D) от f равен нулю]. Как мы видели в начале § 9, для f имеем равенство

$$f(0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{D^1} G(0, 1) \Delta f(1) d\tau_1,$$

и, следовательно,

$$f(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L(1) G(0, 1) h(1) d\tau_1, \quad \text{где} \quad h(1) = -\frac{\Delta f(1)}{L(1)}.$$

Так как f регулярна, то $\Delta f(1)$ ограничена и непрерывна в (D) . Предполагая L ограниченной снизу положительным числом α ($L > \alpha$), заключаем, что $h(m)$ ограничена. Таким образом, $f(m)$ представляется интегралом (81) и, следовательно, приходим к заключению: для всякой функции, регулярной в (D) и удовлетворяющей на (S) соответствующему граничному условию, имеет место условие замкнутости (§0).

§ 14. Замкнутость последовательности фундаментальных функций

Мы докажем замкнутость последовательности фундаментальных функций лишь для пространства функций непрерывных в (D) вплоть до границы. Пусть $f(0)$ такая функция. Для любого произвольного $\varepsilon > 0$ можно найти полином $P(0)$ (полином от x, y, z), удовлетворяющий в области (D) условию: $|f - P| < \varepsilon$ и $|P| < M$, где M верхняя грань для $|f|$.

Пусть $\omega(0)$ такая регулярная в (D) функция, которая равна единице в некоторой области (D') , содержащейся вместе с границей в области (D) , равна нулю вне области (D'') , содержащейся вместе с границей в (D) и содержащей внутри себя область (D') , и такая, что $|\omega(0)| \leq 1$. Мы не будем останавливаться на том, как построить такую функцию для любых областей (D') и (D'') , содержащихся в (D) . Предположим теперь, что объем области $(D - D')$, полученной вычитанием (D') из (D) , меньше ε . Тогда функция $F = P(0)\omega(0)$ регулярна в (D) , совпадает с P в (D') , равна нулю вне (D'') и, следовательно, удовлетворяет каждому из граничных условий (α) , (β) , (γ) . Кроме того, $|F| \leq M$ и, обозначая через A верхнюю грань L , получим:

$$\begin{aligned} \int_{(D)} L(0) |f(0) - F(0)|^2 d\tau &= \int_{(D')} L(0) |f(0) - F(0)|^2 d\tau + \\ &+ \int_{(D-D')} L(0) |f(0) - F(0)|^2 d\tau \leq A D \varepsilon^2 + A \cdot 4M^2 \varepsilon < a\varepsilon, \end{aligned}$$

т. е.

$$\int_{(D)} L(0) |f(0) - F(0)|^2 d\tau < a\varepsilon. \quad (87)$$

Кроме того, для случая (γ) будем предполагать, что интегралы по (D) от функций f и F равны нулю.

Функция F может быть представлена равенством

$$F = -\frac{1}{4\pi} \int_{(D)} G(1, 0) \Delta F d\tau_1,$$

откуда следует, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L(0) F^2(0) d\tau - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 &= 0, \\ a_k &= \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L F V_k d\tau; \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

первое равенство (88) может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L F^2 d\tau - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 &= \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L f^2 d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L (f - F)^2 d\tau + \\ &+ \frac{2}{4\pi} \int_{(D)} L f (F - f) d\tau - 2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k c_k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 - \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = 0, \end{aligned}$$

где

$$b_k = \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L f V_k d\tau,$$

$$c_k = a_k - b_k = \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L (F - f) V_k d\tau.$$

Последнее тождество показывает, что

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L f^2 d\tau - \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L (f - F)^2 d\tau - \frac{2}{4\pi} \int_{(D)} L f (F - f) d\tau + 2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k c_k + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \end{aligned}$$

и что

$$\begin{aligned}
 0 &< \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L f^2 d\tau - \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \\
 &< \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L (f-F)^2 d\tau + \frac{2}{4\pi} \int_{(D)} L |f| |F-f| d\tau + \\
 &\quad + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| |c_k| + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.
 \end{aligned}$$

Но из (87) находим:

$$\begin{aligned}
 &\int_{(D)} L (f-F)^2 d\tau < a\varepsilon, \\
 &\int_{(D)} L |f| |F-f| d\tau < \sqrt{\int_{(D)} L f^2 d\tau \int_{(D)} (F-f)^2 d\tau} < \sqrt{AM^2 Da\varepsilon}, \\
 &\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L (f-F)^2 d\tau < \frac{1}{4\pi} a\varepsilon, \\
 &\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| |c_k| < \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2} < \\
 &< \sqrt{\frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L f^2 d\tau \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L (f-F)^2 d\tau} < \frac{1}{4\pi} \sqrt{AM^2 Da\varepsilon},
 \end{aligned}$$

откуда

$$0 < \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L f^2 d\tau - \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < b \sqrt{\varepsilon}$$

(b — некоторое определенное число). Ввиду произвольности ε последние неравенства показывают, что

$$\frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L f^2 d\tau - \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2,$$

что и требовалось доказать.

Нами доказана замкнутость последовательности фундаментальных функций в классе функций непрерывных вплоть до границы. Имеет место теорема Стеклова: если некоторая последовательность ортогональных и нормированных функций замкнута в классе непрерывных функций, то эта же последовательность замкнута в классе функций, суммируемых с квадратом, т. е. в L_2 . На основании теорем Стеклова и доказанной в этом параграфе последовательность фундаментальных функций замкнута в классе L_2 .

Заметим, что теория замкнутости ортогональных и нормированных последовательностей получает наиболее полное разрешение в классе L_2 : только в этом случае каждой последовательности чисел, ряд квадратов которых сходится, отвечает определенная функция из L_2 , имеющая эти числа своими коэффициентами Фурье, и тем самым имеет место взаимно-однозначное соответствие между всеми последовательностями чисел с указанным выше свойством и всеми функциями класса L_2 .

§ 15. О разложении по фундаментальным функциям

Пусть f и g две функции, интегрируемые с квадратом. Тогда их сумма также интегрируема с квадратом, и поэтому имеем:

$$\int_{(D)} L(f+g)^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)^2,$$

или

$$\int_{(D)} Lf^2 d\tau + \int_{(D)} Lg^2 d\tau + 2 \int_{(D)} Lfg d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k,$$

где

$$a_k = \int_{(D)} LfV_k d\tau, \quad b_k = \int_{(D)} LgV_k d\tau.$$

Так как

$$\int_{(D)} Lf^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \quad \int_{(D)} Lg^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2,$$

находим из предыдущего равенства

$$\int_{(D)} Lfg \, d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k. \quad (89)$$

Пусть (ω) некоторая область внутри (D) . Положим $g(m)$ равной $\frac{1}{\omega}$ в (ω) и равной нулю вне (ω) . Очевидно, что $g(m)$ интегрируема с квадратом. Тогда, применяя равенство (89), получим:

$$\frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} Lf \, d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} LV_k \, d\tau \right).$$

Будем называть средней (с весом L) от функции f по области (ω) выражение

$$\frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} Lf \, d\tau.$$

Тогда предыдущее равенство означает, что средняя от функции f по любой области (ω) разлагается в ряд по средним для той же области от фундаментальных функций.

Выражение

$$\frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} f \, d\tau$$

назовем средней в строгом смысле от функции f по области (ω) .

Предполагая, что L ограничена снизу положительным числом α

$$L \geq \alpha > 0$$

и полагая $g = \frac{1}{L}$ в (ω) и нулю вне (ω) , аналогично предыдущему найдем:

$$\frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} f \, d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{1}{\omega} \int_{(\omega)} V_k \, d\tau \right),$$

т. е. средняя в строгом смысле от функции f по области (ω) также разлагается в ряд по таким же средним от фундаментальных функций.

Доказанные два утверждения являются распространением на случай функций, интегрируемых с квадратом, следующей теоремы Стеклова.

Теорема Стеклова. Если функция $f(m)$ непрерывна в (D) , то ее среднее значение разлагается в ряд по средним значениям фундаментальных функций.

Перейдем теперь к теореме Гильберта—Шмидта.
Теорема Гильберта—Шмидта. Функция

$$f(\mathcal{M}) = \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L(m) G(\mathcal{M}, m) h(m) d\tau, \quad (90)$$

где $h(m)$ функция, интегрируемая с квадратом, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по фундаментальным функциям.

Прежде всего напомним, что в § 13 была доказана замкнутость системы фундаментальных функций в классе функций, представимых интегралом (90). Отсюда следует, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое N , что

$$\int_{(D)} L(f - \sum_{k=1}^n a_k V_k)^2 d\tau < \varepsilon, \quad n \geq N, \quad (91)$$

где

$$a_k = \int_{(D)} L f V_k d\tau = \frac{1}{\lambda_k} b_k = \frac{1}{\lambda_k} \int_{(D)} L h V_k d\tau.$$

При каждой фиксированной точке \mathcal{M} функция $G(\mathcal{M}, m)$ интегрируема с квадратом как функция точки m . Кроме того,

$$c_k(\mathcal{M}) = \int_{(D)} L(m) G(\mathcal{M}, m) V_k(m) d\tau = \frac{V_k(\mathcal{M})}{\lambda_k},$$

и, поэтому, в силу неравенства Бесселя, имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} [c_k(\mathcal{M})]^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|V_k(\mathcal{M})|^2}{\lambda_k^2} \leq \int_{(D)} G^2(\mathcal{M}, m) d\tau \leq A.$$

В силу того же неравенства Бесселя, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$$

сходится, и поэтому по заданному ε найдется N_1 , что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^2 < \varepsilon, \quad \text{если} \quad n \geq N_1.$$

Покажем, что ряд $\sum a_k V_k$ сходится абсолютно и равномерно. Действительно

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k V_k| &= \sum_{k=n+1}^{n+p} |b_k| \cdot \left| \frac{V_k}{V_k} \right| \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k^2} \sqrt{\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{V_k^2}{V_k^2}} < \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k^2}{V_k^2}} \sqrt{\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k^2} < \sqrt{A\varepsilon} \end{aligned}$$

если только $n \geq N_1$ независимо от выбора p . Итак, доказана абсолютная и равномерная сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k V_k = \varphi,$$

сумма которого есть непрерывная функция, которая обозначена нами через φ . Остается убедиться, что $f = \varphi$. Действительно, покажем, что интеграл от квадрата разности $f - \varphi$ равен нулю. Для этого рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int_{(D)} L(f - \varphi)^2 d\tau &= \int_{(D)} L[f - \varphi_n + (\varphi_n - \varphi)]^2 d\tau \leq \\ &\leq 2 \int_{(D)} L(f - \varphi_n)^2 d\tau + 2 \int_{(D)} L(\varphi_n - \varphi)^2 d\tau, \end{aligned}$$

где

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^n a_k V_k.$$

В силу (91) первый интеграл правой части последнего неравенства меньше 2ε , если $n \geq N$.

Так как $\varphi_n \rightarrow \varphi$ стремится равномерно, то при $n \rightarrow \infty$ второй интеграл стремится к нулю и для всех достаточно больших n он меньше 2ε . Отсюда следует, что

$$\int_{(D)} L(f - \varphi)^2 d\tau < 4\varepsilon,$$

что, ввиду произвольности ε , означает

$$\int_{(D)} L(f - \varphi)^2 d\tau = 0.$$

Так как $L > 0$, а f и φ непрерывны, то отсюда следует, что $f = \varphi$, и теорема доказана, так как φ есть сумма равномерно и абсолютно сходящегося ряда фундаментальных функций.

С л е д с т в и е. В § 9 было доказано, что регулярная в (D) функция $f(m)$, удовлетворяющая граничному условию, представляется интегралом (90), где $h(m) = -\Delta f/L$. На основании теоремы Гильберта — Шмидта заключаем, что такая функция разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд фундаментальных функций.

Учитывая замечания § 9, можно сделать то же заключение для функций, непрерывных, удовлетворяющих граничному условию и обладающих ограниченным (не ограниченным, но интегрируемым с квадратом) лапласианом.

§ 16. Функции А. Корна

Рассмотрим интегральное уравнение

$$V(0) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_{(\dot{D}_1)} \frac{L(1) V(1)}{r_{10}} d\tau_1 + f(0), \quad (92)$$

в котором $L(0)$ — функция, никогда не принимающая отрицательных значений.

Было доказано, что

$$\int_{(\dot{D}_1)} \frac{L(1)}{r_{10}^2} d\tau_1 < 1$$

сходящийся интеграл. Мы, следовательно, можем применить к уравнению (92) соображения § 11, 12 и 13.

Отсюда следует, что если последовательность фундаментальных функций

$$V_1, V_2, \dots, V_k, \dots,$$

ортogonalна и нормирована, то условие замкнутости

$$\frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{D})} L(0) f^2(0) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \quad a_k = \frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{D})} L(0) f(0) V_k(0) d\tau$$

имеет место для любой функции $f(0)$, заданной равенством

$$f = \frac{1}{4\pi} \int_{(\dot{D}_1)} \frac{L(1) h(1)}{r_{10}} d\tau_1. \quad (93)$$

Функции, определяемые (93), — ньютоновы потенциалы. Они непрерывны во всем пространстве вместе со своими первыми производными и удовлетворяют уравнению Лапласа вне области (D) .

Если $L(0)h(0)$ правильно непрерывна внутри (D) , то в этой области

$$\Delta f = -L(0)h(0).$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что $L(0)$ — правильно непрерывна.

Если $V_k(0)$ — одна из фундаментальных функций, то

$$V_k(0) = \frac{\lambda_k}{4\pi} \int_{(D_i)} \frac{L(1)V_k(1)}{r_{10}} d\tau_1$$

Это равенство показывает, что V_k имеет повсюду первые производные, т. е. что V_k правильно непрерывна в (D) .

Итак, любая фундаментальная функция V_k непрерывна во всем пространстве со своими первыми производными; она имеет вторые производные, и внутри (D) имеет:

$$\Delta V_k = -\lambda_k L V_k;$$

вне (D)

$$\Delta V_k = 0.$$

Умножая обе части последнего равенства на V_k и интегрируя в (D_i) , получаем:

$$\begin{aligned} -\lambda_k \int_{(D_i)} L V_k^2 d\tau &= \int_{(D_i)} V_k \Delta V_k d\tau = \int_{(D_i)} \sum \frac{\partial V_k}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} d\tau = \\ &= - \int_{(D_i)} \sum \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)^2 d\tau = \int_{(S)} V_k \frac{dV_k}{dn} d\sigma - \int_{(D_i)} \sum \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)^2 d\tau = \\ &= \int_{(S)} V_k \frac{dV_k}{dn} d\sigma - \int_{(D_i)} \sum \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)^2 d\tau = - \int_{(D_e)} \sum \frac{\partial V_k}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} d\tau = \\ &= - \int_{(D_i)} \sum \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)^2 d\tau = - \int_{(D_e)} \sum \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)^2 d\tau - \int_{(D_i)} \sum \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)^2 d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что все характеристические числа уравнения (92) — положительные.

Следует слегка изменить рассуждения § 14. Пусть ψ — ньютонов потенциал, определенный в (D_i) :

$$\psi = \int_{(D_i)} \frac{L(1) d\tau_1}{r_{10}}.$$

Составив полином P , отличающийся меньше, чем на ϵ , от непрерывной в (D) функции $f(0)$

$$|f - P| < \epsilon,$$

найдем функцию F_1 , равную P в такой подобранной нами области (D') , что объем области $(D - D')$ меньше ϵ . В этой последней области функция F_1 должна иметь вторые производные и удовлетворять на (S) условиям

$$(F_1)_i = \psi, \quad \frac{dF_1}{dn} = \frac{d\psi}{dn}. \quad (94)$$

На основании первого из равенств (94) сочетания $\mathcal{D}F_1$ и $\mathcal{D}\psi$ равны, поэтому второе равенство (94) даст:

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_i = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_i = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_i = \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Составим функцию F , полагая внутри (D) $F = F_1$ и вне (D_i) $F = \psi$. Функция F имеет непрерывные первые производные во всем пространстве, имеет внутри (D) вторые производные и удовлетворяет вне (D) уравнению Лапласа.

Отсюда следует, что на основании теоремы § 17 (II)

$$F = -\frac{1}{4\pi} \int_{(D_i)} \frac{\Delta F}{r_{10}} d\tau_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_{(D_i)} \frac{L(1)}{r_{10}} \frac{\Delta F}{L(1)} d\tau_1$$

Таким образом, функция F принадлежит к пространству функций (93), для которых установлена замкнутость последовательности фундаментальных функций.

Повторяя рассуждения § 14, мы получим неравенство.

$$\int_{(D)} L(0) [f(0) - F(0)]^2 d\tau < a\epsilon$$

и равенство

$$\frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L(0) f^2(0) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2, \quad b_k = \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} L(0) f(0) V_k(0) d\tau \quad (95)$$

для пространства непрерывных функций.

Не останавливаясь на доказательстве равенства (95) для пространства функций, ограниченных и интегрируемых, мы займемся теперь одним применением теоремы § 15. Всякий ньютонов потенциал

$$f(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{(D_i)} \frac{L(1) h(1)}{r_{10}} d\tau_1,$$

в котором $h(0)$ — интегрируемая с квадратом функция, может быть разложен в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k V_k(0),$$

$$a_k = \frac{1}{4\pi} \int_{(\tilde{D})} L(0) f(0) V_k(0) d\tau = \frac{1}{4\pi\lambda_k} \int_{(\tilde{D})} L(0) h(0) V_k(0) d\tau.$$

Функции $V_k(0)$ называются всеобщими функциями А. Корна.

§ 17. Интегрирование волнового уравнения

В заключение изучим уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right\} + \Phi(x, y, z), \quad (a^2 = \text{const}). \quad (96)$$

Найдем решение U , удовлетворяющее на (S) одному из следующих трех условий.

$$\left. \begin{aligned} (x) \quad & U = \varphi; \\ (y) \quad & \frac{dU_i}{dn} + hU = \varphi; \\ (z) \quad & \frac{dU_i}{dn} = \varphi \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

[φ — функция точек на (S) , которая может зависеть от времени t], и начальным условиям:

$$U = f_1(x, y, z), \quad \frac{\partial U}{\partial t} = F_1(x, y, z) \text{ при } t = 0, \quad (98)$$

В случае (z) эти данные определяют движение газа (заключенного в сосуде) со скоростью, имеющей потенциал. Здесь U — потенциал скоростей, и если сосуд неподвижен, то $\varphi = 0$.

Применяя замечания § 10, произведем подстановку

$$U = V + U_1$$

и заменим условия (97) условиями.

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & V = 0, \\ (b) \quad & \frac{dV_i}{dn} + hV_i = 0; \\ (z) \quad & \frac{dV_i}{dn} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Уравнение (96) принимает вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right\} + \Phi + a^2 \Delta U_1 - \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = \\ = a^2 \Delta V + K(x, y, z, t); \quad (99)$$

в случаях (α) и (β) ΔU_1 равен нулю; в случае (γ) он имеет постоянное значение. В случаях (α) и (β) $K(x, y, z, t)$ и Φ отличаются друг от друга лишь тогда, когда φ зависит от времени.

В начальный момент $t = 0$ мы имеем:

$$V = f(x, y, z), \quad \frac{\partial V}{\partial t} = F(x, y, z) \text{ при } t = 0, \quad (100)$$

причем

$$f = f_1 - U_1(x, y, z, 0), \quad F = F_1 - \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} \right)_0.$$

Итак, задача сводится к интегрированию уравнения (99) с граничными условиями:

$$\left. \begin{aligned} (\alpha) \quad & V = 0; \\ (\beta) \quad & \frac{dV_i}{dn} + hV_i = 0; \\ (\gamma) \quad & \frac{dV_i}{dn} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ на } (S)$$

и с начальными условиями (100):

$$V = f(x, y, z), \quad \frac{\partial V}{\partial t} = F(x, y, z) \text{ при } t = 0$$

З а м е ч а н и е. Употребляемый нами способ может быть применен к уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \Delta V + K(x, y, z, t) + l \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Мы рассматриваем уравнение (99) исключительно ради краткости изложения.

Предположим, что поставленная задача допускает решение, у которого функция V имеет в промежутке $0 \leq t$ производную $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$, непрерывную в (D) . Применяя к уравнению (99) прием, использованный в § 9 для уравнения (42), мы заключаем, что

$$V = -\frac{1}{4\pi a^2} \int_{(D_1)} G(1, 0) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - K \right) d\tau_1, \quad (101)$$

где $G(1, 0)$ — выбранная подходящим образом функция Грина. Например, в случае (γ) — это модифицированная функция Ф. Неймана. Но если V задана уравнением (101), то, согласно теореме Гильберта — Шмидта, она может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по фундаментальным функциям интегрального уравнения с ядром $G(1, 0)$. Отсюда следует, что если решение имеет непрерывную вторую производную по t , то

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) V_k(0), \quad g_k(t) = \int_{(D)} V(0) V_k(0) d\tau, \quad (102)$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно.

Остается вычислить коэффициенты этого ряда. Представим уравнение (102) в виде

$$V = -\frac{1}{4\pi a^2} \int_{(D_1)} G(1, 0) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} d\tau_1 + \frac{1}{4\pi a^2} \int_{(D_1)} G(1, 0) K(1) d\tau_1,$$

проинтегрируем его два раза по t , принимая во внимание условия (100). Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^t V dt &= -\frac{1}{4\pi a^2} \int_{(D_1)} G(1, 0) \left[\frac{\partial V}{\partial t} - F(1) \right] d\tau_1 + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \left[\int_{(D_1)} G(1, 0) K(1) d\tau_1 \right] dt, \\ \int_0^t \int_0^t V dt^2 &= -\frac{1}{4\pi a^2} \int_{(D_1)} G(1, 0) V(1) d\tau_1 + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi a^2} \int_{(D_1)} G(1, 0) f(1) d\tau_1 + \frac{t}{4\pi a^2} \int_{(D_1)} G(1, 0) F(1) d\tau_1 + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \int_0^t \left[\int_{(D_1)} G(1, 0) K(1) d\tau_1 \right] dt^2. \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

Положим

$$a_k = \int_{(D)} f V_k d\tau, \quad b_k = \int_{(D)} F V_k d\tau, \quad c_k(t) = \int_{(D)} K V_k d\tau,$$

Формулы § 15 дают

$$\left. \begin{aligned} \int_{(\bar{D}_1)} G(1, 0) f(1) d\tau_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} V_k, \\ \int_{(D_1)} G(1, 0) F(1) d\tau_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\lambda_k} V_k, \\ \int_{(\bar{D}_1)} G(1, 0) K(1) d\tau_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(t)}{\lambda_k} V_k, \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

причем все ряды сходятся абсолютно и равномерно. Последний ряд, рассматриваемый как функция t , сходится равномерно; его остаточный член получается подстановкой $m \rightarrow \infty$ в выражение

$$\left(\sum_{k=n}^{k=m} \frac{c_k(t)}{\lambda_k} V_k \right)^2 < \sum_{k=n}^{k=m} c_k^2(t) \cdot \sum_{k=n}^{k=m} \frac{V_k^2}{\lambda_k^2} < \int_{(D)} K^2 dt \cdot \varepsilon, \text{ если } n \geq N;$$

N не зависит от t , оно определяется свойствами ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k^2}{\lambda_k^2},$$

образованного квадратами коэффициентов Фурье от функции $G(1, 0)$. То же самое замечание применимо и к ряду (102), который сходится равномерно, если его рассматривать как функцию от t ; коэффициент $g_k(t)$ равен $\frac{h_k(t)}{\lambda_k}$; под $h_k(t)$ подразумевается коэффициент Фурье, соответствующий функции

$$-\frac{1}{4\pi a^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - K \right).$$

Пользуясь равномерной сходимостью ряда (102), получаем из (103)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^t g_k(t) dt^2 \cdot V_k &= \\ &= -\frac{1}{4\pi a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k(t)}{\lambda_k} V_k + \frac{1}{4\pi a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} V_k + \\ &+ \frac{t}{4\pi a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\lambda_k} V_k + \frac{1}{4\pi a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t \int_0^t c_k(t) dt^2 \cdot V_k. \end{aligned}$$

Ввиду нормировки и ортогональности фундаментальных функций V_k и вследствие равномерной сходимости всех рядов, мы выводим, что

$$4\pi a^2 \lambda_k \int_0^t \int_0^t g_k(t) dt^2 = -g_k(t) + a_k + tb_k + \int_0^t \int_0^t c_k(t) dt^2.$$

Это равенство дает.

$$g_k(0) = a_k; \quad (105)$$

после однократного дифференцирования имеем:

$$g'_k(0) = b_k; \quad (106)$$

после же двукратного дифференцирования мы находим:

$$g''_k(t) + 4\pi a^2 \lambda_k g_k(t) = c_k(t); \quad (107)$$

$g_k(t)$ получается посредством интегрирования уравнения (107) с условиями (105) и (106).

Из общего интеграла уравнения (107)

$$\begin{aligned} g_k(t) = & c_1 \cos 2a \sqrt{\pi \lambda_k} t + c_2 \sin 2a \sqrt{\pi \lambda_k} t + \\ & + \frac{1}{2a \sqrt{\pi \lambda_k}} \int_0^t c_k(\zeta) \sin 2a \sqrt{\pi \lambda_k} (t - \zeta) d\zeta \end{aligned}$$

видим, что искомое решение есть

$$\begin{aligned} g_k(t) = & a_k \cos 2a \sqrt{\pi \lambda_k} t + \frac{b_k}{2a \sqrt{\pi \lambda_k}} \sin 2a \sqrt{\pi \lambda_k} t + \\ & + \frac{1}{2a \sqrt{\pi \lambda_k}} \int_0^t c_k(\zeta) \sin 2a \sqrt{\pi \lambda_k} (t - \zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Итак, решение данной задачи, в которой V имеет в интервале $0 \leq t$ вторую производную, непрерывную в (D) , может выражаться только в виде ряда

$$\begin{aligned} V = & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos 2a \sqrt{\pi \lambda_k} t + \frac{b_k}{2a \sqrt{\pi \lambda_k}} \sin 2a \sqrt{\pi \lambda_k} t \right\} V_k + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k}{2a \sqrt{\pi \lambda_k}} \int_0^t c_k(\zeta) \sin 2a \sqrt{\pi \lambda_k} (t - \zeta) d\zeta, \quad (108) \end{aligned}$$

который должен сходиться равномерно. Если этот ряд не сходится равномерно, то задача не имеет такого решения, для которого V допускает непрерывную в (D) вторую производную по t .^{*}

Введем для того случая, когда ряд (108) сходится абсолютно и равномерно, следующее выражение:

$$R[\varphi(t)] = \frac{\varphi(t+2h) - 2\varphi(t+h) + \varphi(t)}{h^2}.$$

Легко видеть, что если

$$\Phi(t) = \int_0^t \int_0^t \varphi(t) dt^2,$$

то

$$R[\Phi(t)] = \frac{1}{h^2} \int_t^{t+h} \left(\int_t^{z+h} \varphi(\eta) d\eta \right) dz.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} R[\Phi(t)] &= \frac{1}{h^2} \left[\int_0^{t+h} \left(\int_0^{z+h} \varphi(\eta) d\eta \right) dz - 2 \int_0^{t+h} \left(\int_0^z \varphi(\eta) d\eta \right) dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \left(\int_0^z \varphi(\eta) d\eta \right) dz \right] = \frac{1}{h^2} \left[\int_{t-h}^{t+h} \left(\int_0^{z+h} \varphi(\eta) d\eta \right) dz - \int_t^{t+h} \left(\int_0^z \varphi(\eta) d\eta \right) dz \right]. \end{aligned}$$

Заменяя в первом интеграле z через $z+h$, мы получаем:

$$\begin{aligned} R[\Phi(t)] &= \frac{1}{h^2} \left[\int_t^{t+h} \left(\int_0^{z+h} \varphi(\eta) d\eta \right) dz - \int_t^{t+h} \left(\int_0^z \varphi(\eta) d\eta \right) dz \right] = \\ &= \frac{1}{h^2} \int_t^{t+h} \left(\int_t^{z+h} \varphi(\eta) d\eta \right) dz. \end{aligned}$$

Подставляя $V(t)$ вместо φ и замечая, что функция, определяемая рядом (108), удовлетворяет уравнению (103), мы получаем, составляя

^{*} Результаты § 15 позволяют заключить, что если ряд (108) не сходится равномерно, то задача не имеет решений, имеющих интегрируемую с квадратом вторую производную по t .

выражение R для (103):

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \int_t^{t+h} \left(\int_z^{z+h} V(\eta) d\eta \right) dz = & - \frac{1}{4\pi a^2} \int_{(D_1)} G(1, 0) R[V(t)] d\tau_1 + \\ & + \frac{1}{4\pi a^2} \cdot \frac{1}{h^2} \int_t^{t+h} \left[\int_z^{z+h} \left(\int_{(D_1)} G(1, 0) K(1) d\tau_1 \right) d\eta \right] dz \end{aligned}$$

Если $V(t)$ имеет вторую производную по t , то, как мы знаем,

$$\lim R[V(t)] = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad (h \rightarrow 0).$$

Если $R[V(t)]$ стремится равномерно к своему пределу в (D) , то

$$\lim_{(D_1)} \int G(1, 0) R[V(t)] d\tau_1 = \int_{(D_1)} G(1, 0) \lim R[V(t)] d\tau_1;$$

$\varphi(t)$ — предел

$$\frac{1}{h^2} \int_t^{t+h} \left(\int_z^{z+h} \varphi(\eta) d\eta \right) dz$$

при h , стремящемся к нулю, поэтому мы приходим к следующему результату: если

$$R[V(t)]$$

стремится при $t \geq 0$ равномерно к своему пределу, когда h стремится к нулю, то сумма ряда (108) удовлетворяет уравнению (101). Если, кроме того, функция

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - K$$

правильно непрерывна в (D) , то функция V удовлетворяет уравнению (99) и, следовательно, даст решение задачи.

Для того чтобы убедиться в выполнении также и начальных условий, достаточно заметить, что ряд (108) удовлетворяет второму уравнению (103). Интегрируя дважды по t уравнение (101) и вычитая результат из уравнения (103), получаем:

$$\int_{(D_1)} G(1, 0) \left[\left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)_{t=0} - F(1) \right] d\tau_1 + t \int_{(D_1)} G(1, 0) [V_{t=0} - f(1)] d\tau_1 = 0,$$

откуда следует в силу доказанной в § 11 полноты ядра $G(\mathcal{M}, m)$:

$$V_{t=0} = f(0), \quad \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)_{t=0} = F(0).$$

Мы не будем останавливаться на исследовании условий равномерной сходимости ряда (108).

З а м е ч а н и е. В настоящее время получены более сильные результаты относительно решения (108) волнового уравнения.

Для определенности будем говорить о задаче с условием (α). Пусть граница (S) области (D) принадлежит L_b . Пусть функции $f(x, y, z)$ и $F(x, y, z)$ из начального условия (100) имеют в (D) непрерывные производные до четвертого и третьего порядков соответственно, а на границе (S) удовлетворяют условиям

$$f = \Delta f = F = \Delta F = 0.$$

Пусть, кроме того, $K = 0$. При этих условиях доказывается, что ряд (108) и ряды, полученные из него двукратным дифференцированием по x, y, z, t , равномерно сходятся в области (D) и $t \geq 0$. Тогда, очевидно, ряд (108) представляет дважды непрерывно дифференцируемое решение задачи. Эти результаты приведены в статье О. А. Ладыженской „О методе Фурье для волнового уравнения“ (Доклады АН СССР, 1950, т. 75, № 6). Подробное доказательство аналогичного утверждения для волнового уравнения с тремя независимыми переменными x, y, t имеется в IV томе „Курса высшей математики“ В. И. Смирнова.

§ 18. О тепловой задаче

В качестве второго примера возьмем тепловую задачу. В § 7 мы показали, что количество тепла, проходящее через границу (σ) тела (ω), находящегося внутри тела (D), за время dt равно

$$- dt \cdot k \int_{(\sigma)} \frac{du}{dn} d\sigma$$

(здесь u — температура, а k — коэффициент теплопроводности). Отсюда следует, что количество тепла, приобретаемое областью (ω), равно

$$dt \cdot k \int_{(\sigma)} \frac{du}{dn} d\sigma.$$

С другой стороны, это количество пропорционально повышению температуры

$$u(t + dt) - u(t) = \frac{\partial u}{\partial t} dt,$$

причем коэффициент пропорциональности равен произведению теплоемкости c тела на его массу $\rho\omega$. Ввиду возможности существования в теле источников тепла, имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} c\rho\omega dt = dt \cdot k \int_{(\sigma)} \frac{du}{dn} d\sigma + F_1 dt \cdot \omega,$$

Деля на ωdt и стремя затем ω к нулю, мы получаем уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} + F, \quad \left(a^2 = \frac{k}{\rho c} \right). \quad (109)$$

На границе температура должна удовлетворять одному из условий:

$$\left. \begin{aligned} (\alpha) \quad & u = \varphi, \\ (\beta) \quad & \frac{du_i}{dn} + hu = \varphi, \\ (\gamma) \quad & \frac{du_i}{dn} = \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

смотря по тому, поддерживается ли поверхность при данной температуре, или существует излучение в окружающее тело пространство, или, наконец, задана потеря тепла на границе.

Если задано распределение температур в начальный момент, то должно еще иметь место равенство

$$u = f_1(x, y, z) \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (111)$$

Применяя замечания § 10 и выбирая подходящим образом u_1 , производим подстановку:

$$u = V + u_1;$$

как в предыдущем параграфе, мы преобразуем уравнение (109) к виду

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right\} + K; \quad (109')$$

условия (110), соответственно, превратятся в следующие:

$$\left. \begin{aligned} (\alpha) \quad & V = 0, \\ (\beta) \quad & \frac{dV_i}{dn} + hV_i = 0, \\ (\gamma) \quad & \frac{dV_i}{dn} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (110')$$

а начальное условие напишется:

$$V = f(x, y, z) \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (111')$$

Применяя, как в § 17, способ, изложенный в § 9, — к уравнению (109'), мы находим, что

$$V = -\frac{1}{4\pi a^2} \int_{(D_1)} G(1, 0) \left(\frac{\partial V}{\partial t} - K \right) d\tau_1; \quad (112)$$

[$G(1, 0)$ — соответствующая функция Грина].

Но если V задана уравнением (112), то ее можно разложить по фундаментальным функциям интегрального уравнения с ядром

$G(1, 0)$. Полученный ряд сходится абсолютно и равномерно при том единственном условии, что функция $\frac{\partial V}{\partial t} - K$ непрерывна в (D) . Пусть

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) V_k(0) \quad (113)$$

и есть этот ряд. Для вычисления коэффициентов проинтегрируем по t обе части уравнения (112). Получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^t V dt = & - \frac{1}{4\pi a^2} \int_{(D)} G(1, 0) (V - f) d\tau_1 + \\ & + \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \left(\int_{(D)} G(1, 0) K(1) d\tau_1 \right) dt. \end{aligned} \quad (114)$$

Полагая

$$a_k = \int_{(D)} f V_k d\tau, \quad c_k(t) = \int_{(D)} K V_k d\tau,$$

находим:

$$\begin{aligned} \int_{(D)} G(1, 0) f d\tau_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} V_k, \\ \int_{(D)} G(1, 0) K(1) d\tau_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(t)}{\lambda_k} V_k, \end{aligned}$$

что дает после замены V в (114) его значением (113):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} V_k \int_0^t g_k(t) dt = & - \frac{1}{4\pi a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k(t) V_k}{\lambda_k} + \\ & + \frac{1}{4\pi a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k V_k}{\lambda_k} + \frac{1}{4\pi a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k}{\lambda_k} \int_0^t c_k(t) dt. \end{aligned}$$

* Согласно сделанным выше замечаниям, этот ряд сходится абсолютно и равномерно и в том случае, когда $\frac{\partial V}{\partial t} - K$ интегрируема с квадратом.

Отсюда выводим:

$$g_k(0) = a_k \quad (115)$$

и

$$g'_k(t) + 4\pi a^2 \gamma_k g_k(t) = c_k(t). \quad (116)$$

Интегрируя (116) с условием (115), получаем

$$g_k(t) = a_k e^{-4\pi a^2 \gamma_k t} + e^{-4\pi a^2 \gamma_k t} \int_0^t c_k(t) e^{4\pi a^2 \gamma_k t} dt.$$

Таким образом, ряд (113) здесь имеет вид

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ a_k e^{-4\pi a^2 \gamma_k t} + e^{-4\pi a^2 \gamma_k t} \int_0^t c_k(t) e^{4\pi a^2 \gamma_k t} dt \right\} V_k. \quad (117)$$

Если ряд (117) не сходится равномерно в (D) и при $t > 0$, то задача не имеет решений, для которых V допускает при $t \geq 0$ непрерывную в (D) производную по t .*

Предположим, что ряд (117) — абсолютно и равномерно сходящийся. Введем выражение

$$R[\varphi(t)] = \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}.$$

Очевидно, что если

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(t) dt, \quad \text{то} \quad R[\Phi(t)] = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varphi(\zeta) d\zeta$$

Замечая, что сумма ряда (117) удовлетворяет уравнению (114), мы находим, образуя выражение R и подставляя $V(t)$ вместо φ

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} V(\zeta) d\zeta &= -\frac{1}{4\pi a^2} \int_{(D_1)} G(1, 0) R[V(t)] d\tau_1 + \\ &+ \frac{1}{4\pi a^2} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \left(\int_{(D_1)} G(1, 0) K(1) d\tau_1 \right) dt. \end{aligned} \quad (118)$$

Если $V(t)$ имеет первую производную по t при $t \geq 0$, то

$$\lim R[V] = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

* Задача не имеет также решений, у которых $\frac{\partial V}{\partial t} = K$ — функция с интегрируемым квадратом.

Если $R[V]$ стремится равномерно к своему пределу, то из равенства (118) мы сразу находим (112), откуда можно заключить, что уравнение (109') удовлетворяется, если $\frac{\partial V}{\partial t} - K$ правильно непрерывна в (D) .

Мы нашли решение этого уравнения, отвечающее условиям на границе. Это решение соответствует и начальному условию. В самом деле, интегрируя (112) по t и вычитая из уравнения (114), которое удовлетворено, получаем:

$$\int_{(D)} G(1, 0) [f(1) - V_{t=0}] d\tau_1 = 0,$$

откуда, ввиду доказанной в § 11 полноты ядра $G(\mathfrak{U}, m)$, следует, что $V_{t=0} = f(0)$.

Мы не будем останавливаться на исследовании условий, при которых ряд (117) сходится равномерно. Заметим только, что если $f(0)$ может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по фундаментальным функциям, т. е. если ряд

$$f(0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k V_k \quad (119)$$

сходится равномерно и если K равна нулю, то функция (117), принимающая вид

$$V = \sum_{k=1}^{(\infty)} a_k e^{-4\pi a^2 \lambda_k t} V_k, \quad (120)$$

сходится равномерно в промежутке $0 \leq t < +\infty$ и имеет производную по t в промежутке $\alpha \leq t < +\infty$, $\alpha > 0$.

В самом деле,

$$e^{-4\pi a^2 \lambda_k t} < 1$$

и при любом α , если λ_k достаточно велико,

$$4\pi a^2 \lambda_k e^{-4\pi a^2 \lambda_k t} < 1.$$

Таким образом, достаточно показать, что сумма ряда

$$-4\pi a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e^{-4\pi a^2 \lambda_k t} a_k V_k$$

равномерно непрерывна в (D) — правильно непрерывна в той же области, дабы утверждать, что функция (120) дает решение данной задачи.

§ 19. Замечание о задачах, связанных с лапласианом

Незначительность успеха, полученного нами в § 17 и 18, зависит от того обстоятельства, что теорема Пуассона применима только к ньютоновым потенциалам с правильно непрерывной плотностью.

Можно получить несколько более общие результаты, подставляя вместо уравнения (109'), уравнение

$$a^2 \int_{(\sigma)} \frac{dV}{dn} d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_{(\omega)} V d\tau + \int_{(\omega)} K d\tau$$

[в котором (ω) — произвольная область, содержащаяся внутри (D) , (σ) — ее поверхность] и подходящим образом изменяя, если это нужно, условие на границе и пачальное условие.

Можно, например, потребовать, чтобы любая средняя от температуры V была в пачальный момент равна соответствующей средней от заданной функции $f(0)$: по теореме Стеклова, эта последняя функция всегда может быть разложена в сходящийся ряд по средним от фундаментальных функций.

Можно получить более общие результаты, вводя в рассмотрение функции областей и соответственно обобщая теорему Пуассона.

§ 20. Замечание о решении уравнения Пуассона и фундаментальных функциях

Докажем теорему.

Теорема 1. Если $(S) \in \mathcal{L}_{k+1}(B, \lambda)$ ($k \geq 0$) и $\varphi \in H(l, A, \lambda)$ в (D_i) ($0 \leq l \leq k$), то решение уравнения

$$\Delta u = -4\pi\varphi \quad (121)$$

при условиях

$$\text{либо } u|_S = 0, \quad (122)$$

$$\text{либо } \frac{du}{dn} \Big|_S = 0 \quad (123)$$

принадлежит классу $H(l+2, cA, \lambda')$, если $l < k$, и $H(k+1, cA, \lambda')$, если $l = k$.

Действительно, при условии $\varphi \in H(l, A, \lambda)$ и $(S) \in \mathcal{L}_{l+1}(B, \lambda)$ по теореме 2 § 20 следует, что $P[\varphi] \in H(l+2, cA, \lambda')$ в (D_i) и в (D_e) и удовлетворяет в (D_i) уравнению (121) и уравнению Лапласа в (D_e) . Поэтому каждое решение представляется в виде

$$u = P[\varphi] - v, \quad (124)$$

где v — гармоническая функция, удовлетворяющая на границе условию

$$\text{либо } v|_S = P[\varphi], \quad (125)$$

$$\text{либо } \frac{dv}{dn} \Big|_S = \frac{dP[\varphi]}{dn}. \quad (126)$$

Рассмотрим сначала первую задачу. Если $l < k$, то $l + 2 \leq k + 1$, и поэтому предельные значения $P[\varphi]$ на (S) образуют функцию из класса $H(l + 2, cA, \lambda')$. Тогда φ , являясь решением внутренней задачи Дирихле по теореме 1 § 19 (IV), также принадлежит классу $H(l + 2, cA, \lambda')$ в (D_i) . Отсюда на основании (124) следует, что $u \in H(l + 2, c_1A, \lambda')$, и теорема доказана для $l < k$ и условия (122).

В случае $l = k$, хотя $P[\varphi] \in H(l + 2, cA, \lambda')$, но относительно предельных значений на (S) можно лишь утверждать, что они образуют функцию класса $H(k + 1, cA, \lambda')$ на (S) , откуда и следует утверждение теоремы для $l = k$.

Заметим, что, в силу равенства

$$\int_{(D)} \Delta u \, d\tau = \int_{(\dot{S})} \frac{du}{dn} \, d\sigma, \quad (127)$$

необходимым условием разрешимости уравнения (121) с условием (123) является

$$\int_{(D)} \varphi \, d\tau = 0. \quad (128)$$

Предполагая это условие выполненным, найдем, в силу равенств (127) и (128), что

$$\int_{(\dot{S})} \frac{dP[\varphi]}{dn} \, d\sigma = 0,$$

а это является достаточным условием разрешимости внутренней задачи Неймана с условием (126). Таким образом, равенство (128) является и достаточным условием разрешимости уравнения (121) при условии (123).

Очевидно, что в случае условия (123) существует множество решений уравнения (121), отличающихся постоянными слагаемыми. Пусть u_0 — то из решений, которое удовлетворяет условию

$$\int_{(D)} u_0 \, d\tau = 0. \quad (129)$$

Покажем, что $u_0 \in H(l + 2, cA, \lambda')$ для $l < k$ и $u_0 \in H(k + 1, cA, \lambda')$ при $l = k$. Действительно,

$$\frac{dP}{dn} \in H(l + 1, cA, \lambda'), \quad (l < k); \quad \frac{dP}{dn} \in H(k, cA, \lambda), \quad (l = k),$$

и поэтому на основании теоремы 1 § 18 (III) следует, что

$$v = v_1 + C',$$

где $v_1 \in H(l+2, c_1 A, \lambda')$, ($l < k$), $v_1 \in H(k+1, c_1 A, \lambda')$, ($l = k$), является тем решением задачи Неймана, которое на (S) удовлетворяет условию

$$\int_{(S)} p_1 v_1 d\sigma = 0.$$

Но из условия (129) следует

$$\int_{(D)} \{P[\varphi] - v_1 - C'\} d\tau = 0,$$

откуда заключаем, что

$$|C'| = \frac{1}{D} \left| \int_{(D)} \{P[\varphi] - v_1\} d\tau \right| \leq \frac{c+c_1}{D} A = c_2 A.$$

Поэтому $v = v_1 + C' \in H(l+2, c_3 A, \lambda')$, ($l < k$), а следовательно, и $u_0 = P[\varphi] - v \in H(l+2, c_4 A, \lambda')$ ($l < k$). Аналогично для случая $l = k$. Теорема полностью доказана.

Пользуясь доказанной теоремой, изучим некоторые свойства фундаментальных функций уравнения $\Delta u + \lambda Lu = 0$.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \dots$ система характеристических чисел и $V_1, V_2, \dots, V_m, \dots$ система соответствующих фундаментальных функций уравнения

$$\Delta V_m + \lambda L V_m = 0, \quad (L > 0), \quad (130)$$

удовлетворяющих на (S) условию

$$V_m = 0 \quad (131)$$

и нормированных так, что

$$\int_{(D)} L V_m^2 d\tau = 1. \quad (132)$$

Теорема 2. Если $(S) \in \mathcal{H}_{k+1}(B, \alpha)$, ($k \geq 0$) и $L \in H(k, A, \alpha)$, то V_m имеют ограниченные непрерывные производные до

порядка $k+1$, причем производные порядка l , ($0 \leq l \leq k+1$) ограничены числами вида $a_l \lambda_m^{\frac{l}{2}+1}$, если l — четное число, и $a_l \lambda_m^{\frac{l+1}{2}+1}$, если l — нечетное число, где a_l не зависит от номера m . Кроме того, производные порядка $k+1$ правильно непрерывны.

Существование вторых производных у фундаментальных функций V_m в каждой внутренней точке области (D_i) было доказано выше, в § 10, в предположении, что L правильно непрерывна в каждой области, лежащей с границей внутри (D_i) . Точно так же можно доказать, что если функция L имеет производные порядка $j \geq 1$ правильно непрерывные в некоторой области (D') , лежащей вместе с границей внутри (D_i) , то V_m имеет непрерывные производные порядка $j+2$ в (D') .

При сделанных в теореме предположениях функции V_m имеют непрерывные в (D_i) производные до порядка $k+2$, но о поведении этих производных вблизи границы (S) никаких утверждений сделать нельзя. Наша цель — доказать ограниченность производных V_m до порядка $k+1$, их правильную непрерывность и указать зависимость верхней грани модуля производной от характеристического числа λ_m .

Для этого рассмотрим сначала ньютонов потенциал $P \left[\frac{\lambda_m}{4\pi} LV_m \right]$. В силу условия (132), имеем:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\lambda_m}{4\pi} LV_m \right\|_{L_2} &= \sqrt{\int_{(D)} \frac{\lambda_m^2}{(4\pi)^2} (LV_m)^2 d\tau} \leq \\ &\leq \frac{\lambda_m}{4\pi} \sqrt{A \int_{(D)} LV_m^2 d\tau} = \frac{\lambda_m}{4\pi} \sqrt{A} = c_1 \lambda_m, \end{aligned}$$

и по теореме § 24 (II) имеем:

$$P \left[\frac{\lambda_m}{4\pi} LV_m \right] \in H \left(0, c_2 \lambda_m, \frac{1}{2} \right).$$

Отсюда на основании теоремы 1 § 19 (IV) следует, что гармоническая функция v , имеющая на (S) такие же значения, как и $P \left[\frac{\lambda_m}{4\pi} LV_m \right]$, принадлежит в (D_i) классу $H(0, c_3 \lambda_m, \alpha')$, где $\alpha' < \min \left(\frac{1}{2}, \alpha \right)$. Так как $V_m = P \left[\frac{\lambda_m}{4\pi} LV_m \right] - v$, то

отсюда заключаем, что

$$V_m \in H(0, c_4 \lambda_m, \alpha'), \quad (133)$$

и теорема для $l=0$ доказана, так как $|V_m| < c_4 \lambda_m = a_0 \lambda_m$.

Перепишем уравнение (110) в виде

$$\Delta V_m = -4\pi \left(\frac{\lambda_m}{4\pi} L V_m \right) \quad (134)$$

и предположим, что доказано

$$V_m \in H(l, a_l \lambda_m^{q_l}, \alpha'). \quad (135)$$

Тогда из (135) заключаем, что

$$\frac{\lambda_m}{4\pi} L V_m \in H(l, b_l \lambda_m^{q_l+1}, \alpha'),$$

и на основании теоремы 1 и уравнения (134) следует:

$$V_m \in H(l+2, a_{l+2} \lambda_m^{q_l+1}, \alpha''), \quad \text{если } l < k,$$

$$V_m \in H(k+1, a_{k+1} \lambda_m^{q_k+1}, \alpha''), \quad \text{если } l = k,$$

а это означает, что

$$q_{l+2} = q_l + 1, \quad \text{если } l < k, \quad \text{и} \quad q_{k+1} = q_k + 1. \quad (136)$$

Из (133) следует, что $q_0 = 1$. Из (136) следует, что $q_l = 1 + \frac{l}{2}$, если l четное число и $l \leq k$.

Если $(S) \in \mathcal{L}_{k+1}$, ($k \geq 1$), то тем самым $(S) \in \mathcal{L}_1$, и поэтому, считая $k=0$, найдем $q_1 = q_0 + 1 = 2$. Можно было бы к этому выводу прийти и другим путем, одновременно доказав, что первые производные правильно непрерывны с показателем 1. Этот другой путь доказательства приводить не будем.

Так как $q_1 = 2$ и $q_{l+2} = q_l + 1$, то $q_l = 2 + \frac{l-1}{2} = 1 + \frac{l+1}{2}$, если l нечетное число и $l \leq k$. Этим теорема доказана.

Замечание. Аналогичная теорема имеет место для фундаментальных функций с условиями на границе.

$$\text{либо } \frac{dV_m}{dn} = 0,$$

$$\text{либо } \frac{dV_m}{dn} + hV_m = 0, \quad (h = \text{const}, h > 0).$$

На доказательстве этого не останавливаемся.

ДОПОЛНЕНИЯ

І. ТЕОРЕМА ЛЯПУНОВА О ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ, ПЛОТНОСТЬ КОТОРОГО ПРАВИЛЬНО НЕПРЕРЫВНА

Теорема. Если плотность μ потенциала простого слоя

$$V(1) = \int_{(S_2)} \mu(2) \frac{d\sigma_2}{r_{12}}$$

правильно непрерывна на (S) , то первые производные потенциала правильно непрерывны в (D_i) и в (D_e) .

Для доказательства заметим, что производная $\frac{\partial V}{\partial x}$ потенциала простого слоя в каждой внутренней точке области (D_i) или (D_e) имеет непрерывные производные всех порядков и удовлетворяет уравнению Лапласа. Кроме того, $\frac{\partial V}{\partial x}$ обращается на бесконечности в нуль. Поэтому $\frac{\partial V}{\partial x}$ есть гармоническая функция во всякой области, лежащей вместе с границей в (D_i) или в (D_e) . Если доказать, что $\frac{\partial V}{\partial x}$ имеет определенные предельные значения $\frac{\partial V_i}{\partial x}$ или $\frac{\partial V_e}{\partial x}$, когда точка m_1 , оставаясь в (D_i) или в (D_e) , приближается к точке границы (S) , и что эти предельные значения $\frac{\partial V_i}{\partial x}$ и $\frac{\partial V_e}{\partial x}$ суть правильно непрерывные функции на границе, то теорема будет доказана. Действительно, в силу единственности решения задачи Дирихле, гармоническая функция внутри (D_i) или (D_e) , предельные значения которой на (S) правильно непрерывны, является правильно непрерывной функцией в (D_i) или в (D_e) . Заметим, что исследование задач Дирихле и Неймана для поверхностей

Ляпунова проводилось без привлечения доказываемой сейчас теоремы.

Для определенности ограничимся случаем области (D_e)

Итак, докажем, что $\frac{\partial V_e}{\partial x}$ существует и является правильной непрерывной функцией на (S) . Существование и просто непрерывность $\frac{\partial V_e}{\partial x}$ были доказаны Ляпуновым, а правильная непрерывность была им высказана без доказательства. Приводимое ниже доказательство существования принадлежит Ляпунову, а доказательство правильной непрерывности Н. М. Гюнтеру. В последующем будем считать $\lambda < 1$.

1. Пусть ξ, η, ζ местные координаты с началом в некоторой точке m_0 поверхности (S) , причем ось $O\xi$ направлена по нормали N_0 . Пусть точка $m_1(0, 0, \delta)$, где $0 < \delta < \frac{d}{4}$, лежит на нормали N_0 в точке m_0 . Тогда, как известно, $\frac{\partial V}{\partial \zeta}$ при $\delta \rightarrow 0$ имеет пределом $\frac{dV}{dn} - 2\pi\mu_0$; кроме того, на основании теоремы § 6 (II) имеем:

$$\left| \left(\frac{\partial V}{\partial \zeta} \right)_{m_1} - \frac{dV}{dn} + 2\pi\mu_0 \right| < aA\delta^\lambda. \quad (1)$$

Мы сейчас докажем, что $\frac{\partial V}{\partial \xi}$ также имеет предел при $\delta \rightarrow 0$ и отличается от своего предела на величину, модуль которой не превосходит $aA\delta^\lambda$. Очевидно, что аналогичное утверждение будет иметь место также и для $\left(\frac{\partial V}{\partial \eta} \right)_m$.

Пусть (Σ) означает участок поверхности (S) , лежащий внутри сферы Ляпунова с центром в m_0 и проектирующийся на плоскость ξ, η в некоторый круг с центром в m_0 и радиуса, не меньшего $\frac{d}{2}$; радиус R этого круга будет выбран позже. В последующем точка $m(\xi, \eta, \zeta)$ будет обозначать точку интегрирования. Кроме того, r_1 и r_0 будут означать расстояния до m от m_1 и m_0 . Имеем:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \xi} \right)_{m_1} = \int_{(S)} \mu \frac{\xi}{r_1^3} d\sigma = \int_{(S-\Sigma)} \mu \frac{\xi}{r_1^3} + \int_{(\Sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\xi}{r_1^3} + \mu_0 \int_{(\Sigma)} \frac{\xi}{r_1^3} d\sigma, \quad (2)$$

где μ_0 значение μ в точке m_0 .

Первый интеграл правой части (2) непрерывен в окрестности точки m_0 и имеет своим пределом при $\delta \rightarrow 0$ аналогичный интеграл с заменой r_1 на r_0 . Кроме того, этот интеграл от своего предела отличается на величину, модуль которой не превосходит числа вида $aA\delta$. Покажем, что интеграл

$$\int_{(\Sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\xi}{r_0^3} d\sigma \quad (3)$$

сходится и является пределом при $\delta \rightarrow 0$ для второго интеграла правой части (2). Действительно, из неравенств

$$|\mu - \mu_0| < A\rho^\lambda, \quad |\xi| < \rho, \quad \frac{1}{r_0} < \frac{1}{\rho}$$

следует, что

$$|\mu - \mu_0| \frac{|\xi|}{r_0^3} < A\rho^{\lambda-2},$$

а это обеспечивает сходимость интеграла. Кроме того, обозначая через (2δ) часть (Σ) внутри сферы радиуса 2δ с центром в m_0 , найдем, что модуль интеграла по (2δ) не превосходит $\frac{4\pi}{\lambda} A(2\delta)^\lambda$. Аналогичную оценку имеем для интеграла по (2δ) , если заменить r_0 на r_1 , так как имеем также $r_{12} > \rho$. Очевидно, имеем:

$$\left| \int_{(\Sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\xi}{r_1^3} d\sigma - \int_{(\Sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\xi}{r_0^3} d\sigma \right| \leq \int_{(\Sigma - 2\delta)} |\mu - \mu_0| \cdot |\xi| \cdot \left| \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3} \right| d\sigma + \int_{(2\delta)} |\mu - \mu_0| \frac{|\xi|}{r_1^3} d\sigma + \int_{(2\delta)} |\mu - \mu_0| \frac{|\xi|}{r_0^3} d\sigma. \quad (4)$$

Сумма последних двух слагаемых правой части (4) не превосходит $8\pi\lambda^{-1}A(2\delta)^\lambda$. Для оценки первого интеграла правой части (4), заметим, что на $(\Sigma - 2\delta)$ в силу неравенства (9)

§ 2 (II) имеем: $\frac{1}{r_1} < \frac{2}{r_0} < \frac{2}{\rho}$. Поэтому

$$\left| \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3} \right| = \frac{|r_1 - r_0|}{r_1 r_0^2} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1 r_0} + \frac{1}{r_0^2} \right) < \frac{14\delta}{r_1^4} < \frac{14\delta}{\rho^4}$$

и, следовательно, модуль исследуемого интеграла не превосходит

$$\begin{aligned} 56\pi A\delta \int_{\delta}^d \rho^{\lambda} \rho \cdot \frac{1}{\rho^4} \cdot \rho d\rho &= 56\pi A\delta \int_{\delta}^d \rho^{\lambda-2} d\rho = \\ &= 56\pi A\delta \left(\frac{\delta^{\lambda-1}}{1-\lambda} - \frac{d^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right) < \frac{56\pi}{1-\lambda} A\delta^{\lambda}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что второй интеграл правой части (2) отличается от своего предела (3) на величину, модуль которой меньше числа вида $A\delta^{\lambda}$.

Перейдем к исследованию третьего интеграла правой части (2). Прежде всего заметим, что

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\xi}{\sqrt{\rho^2 + \delta^2}} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho^2 \cos \varphi}{(\sqrt{\rho^2 + \delta^2})^3} d\rho d\varphi = 0,$$

т. е.

$$\int_{(\Sigma)} \frac{\xi \cos (NN_0)}{(\sqrt{\rho^2 + \delta^2})^3} d\sigma = 0.$$

Обозначим $\cos (NN_0) = \gamma$. Тогда

$$\int_{(\Sigma)} \frac{\xi}{r_1^3} d\sigma = \int_{(\Sigma)} \xi \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{\gamma}{(\sqrt{\rho^2 + \delta^2})^3} \right) d\sigma = \int_{(\Sigma)} \left(\frac{T^3}{\gamma} - 1 \right) \frac{\xi \gamma}{(\sqrt{\rho^2 + \delta^2})^3} d\sigma, \quad (5)$$

где

$$T = \frac{\sqrt{\rho^2 + \delta^2}}{r_1} = \frac{\sqrt{\rho^2 + \delta^2}}{\sqrt{\rho^2 + (\delta - \zeta)^2}}.$$

Очевидно $\sqrt{\rho^2 + \delta^2}$ есть расстояние точки m_1 до проекции m' точки m на плоскость (ξ, η) . Поэтому из треугольника $m_1 m m'$ заключаем, что

$$|\sqrt{\rho^2 + \delta^2} - r_1| < mm' = |\zeta| < b\rho^{1+\lambda},$$

откуда

$$|T - 1| = \frac{|\sqrt{\rho^2 + \delta^2} - r_1|}{r_1} < b\rho^{\lambda}, \quad (6)$$

и, следовательно, считая d настолько малым, что $bd^\lambda < \frac{1}{2}$, будем также иметь:

$$\frac{1}{2} < T < \frac{3}{2}. \quad (6')$$

Вспоминая, что $\gamma = \cos(NN_0) > \frac{1}{2}$ и $1 - \gamma = 1 - \cos(NN_0) < \frac{1}{2}$ $(NN_0)^2 < (NN_0) < E(2\rho)^\lambda$, найдем:

$$\begin{aligned} \left| \frac{T^3}{\gamma} - 1 \right| &= |(T-1)(T^2 + T + 1) + (1-\gamma)| \cdot \frac{1}{\gamma} < \\ &< 2 \left[b\rho^\lambda \cdot \left(\frac{9}{4} + \frac{3}{2} + 1 \right) + E(2\rho)^\lambda \right] = C\rho^\lambda, \end{aligned} \quad (6'')$$

причем эта оценка не зависит от δ , т. е. верна для любого положения точки m_1 .

Поэтому подынтегральная функция в интеграле (5) не превосходит по модулю функции

$$C\rho^\lambda \cdot \frac{\rho}{\rho^3} = C\rho^{\lambda-2},$$

откуда следует сходимость интеграла в правой части (5) также при $\delta = 0$.

Обозначим

$$T_0 = \frac{\rho}{r_0} = \sin(r_0 N_0) \quad (7)$$

и покажем, что

$$\int_{(\Sigma)} \left(\frac{T_0^3}{\gamma} - 1 \right) \frac{\xi \gamma}{\rho^3} d\sigma \quad (8)$$

является пределом (5) при $\delta \rightarrow 0$ и что интегралы (5) и (8) отличаются величиной, модуль которой меньше числа вида $aA\delta^\lambda$. Действительно, интегралы (5) и (8) по части (σ) , проектирующейся на плоскость (ξ, η) в круг радиуса 2δ с центром в m_0 , по модулю не превосходят чисел вида $aA\delta^\lambda$. Остается изучить интеграл

$$\begin{aligned} &\int_{(\Sigma-\sigma)} \gamma \xi \left\{ \left(\frac{T^3}{\gamma} - 1 \right) \frac{1}{(\sqrt{\rho^2 + \delta^2})^3} - \left(\frac{T_0^3}{\gamma} - 1 \right) \frac{1}{\rho^3} \right\} d\sigma = \\ &= \int_{(\Sigma-\sigma)} \gamma \xi \left\{ \left(\frac{T_0^3}{\gamma} - 1 \right) \left(\frac{1}{(\sqrt{\rho^2 + \delta^2})^3} - \frac{1}{\rho^3} \right) + \frac{1}{(\sqrt{\rho^2 + \delta^2})^3} \frac{T^3 - T_0^3}{\gamma} \right\} d\sigma. \end{aligned} \quad (9)$$

Очевидно, имеем:

$$\left| \frac{1}{(V \rho^2 + \delta^2)^3} - \frac{1}{\rho^3} \right| = \frac{V \rho^2 + \delta^2 - \rho}{\rho V \rho^2 + \delta^2} \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho V \rho^2 + \delta^2} + \frac{1}{\rho^2 + \delta^2} \right) < \frac{3\delta}{\rho^4},$$

и поэтому, в силу (6''), имеем:

$$\left| \xi \left(\frac{T_0^3}{\gamma} - 1 \right) \left(\frac{1}{(V \rho^2 + \delta^2)^3} - \frac{1}{\rho^3} \right) \right| < \frac{3\delta \cdot \rho C \rho^\lambda}{\rho^4} = 3C\delta \rho^{\lambda-3}.$$

Кроме того, имеем:

$$\begin{aligned} |T^2 - T_0^2| &= \left| \frac{\rho^2 + \delta^2}{\rho^2 + (\delta - \zeta)^2} - \frac{\rho^2}{\rho^2 + \zeta^2} \right| = \frac{\rho^2 (\delta^2 \zeta^2 + 2\rho^2 \delta \zeta)}{(\rho^2 + \delta^2)(\rho^2 + \zeta^2)} = \\ &= T^2 \delta |\zeta| \frac{2\rho^2 + \delta |\zeta|}{(\rho^2 + \delta^2)(\rho^2 + \zeta^2)} < 3T^2 \frac{\delta |\zeta|}{\rho^2} < \frac{27}{4} b \delta \rho^{\lambda-1}, \end{aligned}$$

откуда следует, так как $T^3 - T_0^3$, $T^2 - T_0^2$ и $T - T_0$ одного знака,

$$\begin{aligned} |T^3 - T_0^3| &= |(T^2 - T_0^2)(T + T_0) - TT_0(T - T_0)| < \\ &< (T + T_0) |T^2 - T_0^2| < \frac{81}{4} b \delta \rho^{\lambda-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left| \xi \frac{1}{(V \rho^2 + \delta^2)^3} \frac{T^3 - T_0^3}{\gamma} \right| < \rho \cdot \frac{1}{\rho^3} \cdot \frac{81b}{2} \delta \rho^{\lambda-1} = \frac{81b}{2} \delta \rho^{\lambda-2}.$$

Поэтому модуль интеграла (9) не превосходит

$$\begin{aligned} 4\pi c_1 \delta \int_{\frac{\delta}{2}}^R \rho^{\lambda-2} \rho \, d\rho &< 4\pi c_1 \delta \int_{\frac{\delta}{2}}^d \rho^{\lambda-2} \rho \, d\rho = \frac{4\pi c_1}{1-\lambda} \delta [(2\delta)^{\lambda-1} - d^{\lambda-1}] < \\ &< \frac{4\pi c_1}{(1-\lambda) 2^{1-\lambda}} \delta^\lambda = c_2 \delta^\lambda. \end{aligned}$$

Этим доказано, что интеграл (5) отличается от своего предела (8) на величину, модуль которой меньше $c_3 \delta^\lambda$. Окончательно имеем:

$$\frac{\partial V_e}{\partial \xi} = \int_{(S-\Sigma)} \mu \frac{\xi}{r_0^3} d\sigma + \int_{(\Sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\xi}{r_0^3} d\sigma + \mu_0 \int_{(\Sigma)} \left(\frac{T_0^3}{\gamma} - 1 \right) \frac{\xi \gamma}{\rho^3} d\sigma. \quad (10)$$

Заменяя ξ на η , получим формулу для $\frac{\partial V_e}{\partial \eta}$, которую, не выписывая, назовем (10₁).

Пусть теперь x, y, z какая-либо фиксированная система координат. Так как

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{m_1} = \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_{m_1} \cos(\xi x) + \left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)_{m_1} \cos(\eta x) + \left(\frac{\partial V}{\partial \zeta}\right)_{m_1} \cos(\zeta x),$$

то $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{m_1}$ имеет определенный предел при $\delta \rightarrow 0$, равный

$$\frac{\partial V_e}{\partial x} = \frac{\partial V_e}{\partial \xi} \cos(\xi x) + \frac{\partial V_e}{\partial \eta} \cos(\eta x) + \frac{\partial V_e}{\partial \zeta} \cos(\zeta x); \quad (11)$$

кроме того, из полученных выше оценок следует, что

$$\left| \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{m_1} - \frac{\partial V_e}{\partial x} \right| < cA\delta^2, \quad (12)$$

так как аналогичным неравенствам удовлетворяет каждое слагаемое правой части (11).

Таким образом доказано, что $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{m_1}$ стремится к определенному пределу, если точка m_1 приближается к точке m_0 поверхности (S) , оставаясь на нормали N_0 . Покажем, что к этому же пределу стремится $\frac{\partial V}{\partial x}$ при любом способе приближения точки m_1 к m_0 .

Действительно, в каждой точке m поверхности (S) поставим в соответствии ту точку m_δ из (D_e) , которая лежит на нормали N в точке m на расстоянии δ от m . Значение $\frac{\partial V}{\partial x}$ в точке m_δ есть непрерывная функция точки m , так как двум близким точкам m' и m'' на (S) отвечают близкие точки m'_δ и m''_δ .

Так как, в силу (12), $\frac{\partial V_e}{\partial x}$ есть равномерный предел $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{m_1}$ при $\delta \rightarrow 0$, то $\frac{\partial V_e}{\partial x}$ есть непрерывная функция точки m на (S) .

Пусть m_0 некоторая точка (S) , и m_1 некоторая точка в (D_e) , находящаяся на расстоянии δ от m_0 . Пусть m_2 ближайшая к m_1 точка (S) . Имеем $r_{12} < \delta$ и, следовательно, $r_{02} < 2\delta$.

Так как

$$\left| \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{m_1} - \left(\frac{\partial V_e}{\partial x} \right)_{m_0} \right| \leq \left| \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{m_1} - \left(\frac{\partial V_e}{\partial x} \right)_{m_2} \right| + \\ + \left| \left(\frac{\partial V_e}{\partial x} \right)_{m_2} - \left(\frac{\partial V_e}{\partial x} \right)_{m_0} \right|,$$

и слагаемые правой части стремятся к нулю при $\delta \rightarrow 0$, то стремится к нулю и левая часть, что доказывает наше утверждение.

Отсюда следует, что $\frac{\partial V}{\partial x}$ непрерывна в замкнутой области и поэтому равномерно непрерывна и ограничена. Из наших оценок следует, что $\left| \frac{\partial V}{\partial x} \right|$ ограничена числом вида cA .

2. Докажем, что $\frac{\partial V_e}{\partial x}$ правильно непрерывна на (S).

Пусть m_0 некоторая точка поверхности и x, y, z местная система координат, связанная с точкой m_0 . Пусть m_1 другая точка поверхности, находящаяся на расстоянии δ от точки m_0 . Через ξ, η, ζ будем обозначать местную систему координат с началом в точке m_1 . Для доказательства утверждения о правильной непрерывности предельных значений первых производных потенциала простого слоя, достаточно доказать, что разности

$$\left(\frac{\partial V_e}{\partial x} \right)_{m_1} - \left(\frac{\partial V_e}{\partial x} \right)_{m_0}, \left(\frac{\partial V_e}{\partial y} \right)_{m_1} - \left(\frac{\partial V_e}{\partial y} \right)_{m_0}, \left(\frac{\partial V_e}{\partial z} \right)_{m_1} - \left(\frac{\partial V_e}{\partial z} \right)_{m_0} \quad (13)$$

по модулю не превосходят чисел вида $aA\delta^\lambda$. Так как изучение второй разности аналогично изучению первой, то достаточно рассмотреть первую и третью разности. Займемся сначала третьей.

Имеем:

$$\left(\frac{\partial V_e}{\partial z} \right)_{m_1} = \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{m_0} - 2\pi\mu_0;$$

в силу (11)

$$\left(\frac{\partial V_e}{\partial z} \right)_{m_1} = \left(\frac{\partial V_e}{\partial \xi} \right)_{m_1} \cos(\xi z) + \left(\frac{\partial V_e}{\partial \eta} \right)_{m_1} \cos(\eta z) + \\ + \left[\left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{m_1} - 2\pi\mu_1 \right] \cos(N_1 N_0).$$

Отсюда следует, обозначая через λ' произвольное число $0 < \lambda' < \lambda$,

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\partial V_e}{\partial z} \right)_{m_1} - \left(\frac{\partial V_e}{\partial z} \right)_{m_0} \right| &< cA (|\cos(\xi z)| + |\cos(\eta z)| + \\ &+ \left| \left(\frac{dV}{dn} \right)_{m_0} - \left(\frac{dV}{dn} \right)_{m_1} + 2\pi(\mu_1 - \mu_0) |\cos(N_1 N_0)| + \\ &+ \left| \left(\frac{dV}{dn} \right)_{m_0} - 2\pi\mu_0 | [1 - \cos(N_1 N_0)] < c_1 A \delta^{\lambda'}, \end{aligned}$$

так как

$$|\cos(\xi z)| = |\cos(\xi N_0) - \cos(\xi N_1)| < (N_1 N_0) < E\delta^\lambda;$$

$$|\cos(\eta z)| < E\delta^\lambda;$$

$$1 - \cos(N_1 N_0) < 2 \sin^2 \frac{(N_1 N_0)}{2} < (N_1 N_0) < E\delta^\lambda;$$

$$|\mu_1 - \mu_0| < A\delta^\lambda; \quad \left| \left(\frac{dV}{dn} \right)_{m_0} - \left(\frac{dV}{dn} \right)_{m_1} \right| < cA\delta^{\lambda'}.$$

Последнее из указанных неравенств доказано в предположении, что μ просто ограничено. Если μ правильно непрерывно, то можно доказать, что имеет место неравенство с показателем λ . Так как мы этим пользоваться не будем, то останавливаться на доказательстве не станем. Итак, третья из разностей (13) оценивается величиной $c_1 A \delta^{\lambda'}$.

Перейдем к доказательству аналогичного утверждения для первой из разностей (13).

3. Для этого сначала вычислим $\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{m_1}$. Координаты точки m интегрирования будем обозначать x, y, z либо ξ, η, ζ . Через r_1 обозначим расстояние от m_1 до m_0 . Очевидно, имеем: $\xi \cos(\xi x) + \eta \cos(\eta x) + \zeta \cos(\zeta x) = r_1 \cos(r_1 x) = x - x_1$, (14)

где x_1 — координата точки m_1 .

Используя формулу

$$\left(\frac{\partial V_e}{\partial \zeta} \right)_{m_1} = \int_{(S)} \mu \frac{\zeta}{r_1^3} d\sigma - 2\pi\mu_1,$$

а также формулы (10), (10₁), (11), (14), найдем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V_e}{\partial x}\right)_{m_1} = & \int_{(S-\Sigma_1)} \mu \frac{x-x_1}{r_1^3} d\sigma + \int_{(\Sigma_1)} (\mu - \mu_1) \frac{x-x_1}{r_1^3} d\sigma + \\ & + \mu_1 \int_{(\Sigma_1)} \left(\frac{r_1^3}{\gamma_1} - 1\right) \frac{(x-x_1)\gamma_1}{\rho_1^3} d\sigma + \cos(\zeta x) \times \\ & \times \left[-2\pi\mu_1 + \mu_1 \int_{(\Sigma_1)} \frac{\zeta}{r_1^3} d\sigma - \mu_1 \int_{(\Sigma_1)} \left(\frac{r_1^3}{\gamma_1} - 1\right) \frac{\zeta\gamma_1}{\rho_1^3} d\sigma \right], \quad (15) \end{aligned}$$

где $\gamma_1 = \cos(N_1 N)$; ρ_1 — проекция r_1 на касательную плоскость (ξ, η) в точке m_1 ; (Σ_1) есть часть (S) , проектирующаяся на плоскость (ξ, η) в некоторый круг с центром в m_1 и радиуса R_1 $\left(\frac{d}{2} < R_1 < d\right)$, лежащая внутри сферы Ляпунова с центром в m_1 . Так как $|\zeta| < b\rho_1^{1+\nu}$, то все интегралы в квадратной скобке сходятся и модуль квадратной скобки не превосходит числа вида cA . Кроме того,

$$\begin{aligned} |\cos(\zeta x)| &= |\cos(N_1 x)| = \\ &= |\cos(N_1 x) - \cos(N_0 x)| \leq (N_1 N_0) < E\delta. \end{aligned}$$

Поэтому модуль произведения квадратной скобки на $\cos(\zeta x)$ не превосходит числа $cA\delta^2$; при оценке первой разности (13) это слагаемое повторять не будем.

Далее имеем на основании (10)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V_e}{\partial x}\right)_{m_0} = & \int_{(S-\Sigma)} \mu \frac{x}{r_0^3} d\sigma + \\ & + \int_{(\Sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{x}{r_0^3} d\sigma + \mu_0 \int_{(\Sigma)} \left(\frac{r_0^3}{\gamma} - 1\right) \frac{x\gamma}{\rho^3} d\sigma. \quad (16) \end{aligned}$$

Прежде всего зафиксируем Σ , положив радиус R ее проекции на плоскость (ξ, η) равным $\frac{d}{2}$. В последующем будем считать $\delta < \frac{d}{4}$. Тогда точка m_1 лежит на (Σ) . Кроме того, будем считать радиус d сферы Ляпунова настолько малым, чтобы прямые, параллельные нормали в любой точке части

поверхности внутри некоторой сферы Ляпунова, пересекали бы эту часть поверхности не более одного раза. Перейдем теперь к выбору (Σ_1) . Пусть (Σ') означает фигуру, полученную проектированием (Σ) на плоскость (ξ, η) ; очевидно, (Σ') содержит внутри себя точку m_1 . Пусть R_1 и R_2 наибольшее и наименьшее из расстояний точки m_1 до точек контура (Σ') . В качестве (Σ_1) выберем ту часть (S) , которая проектируется на плоскость (ξ, η) в круг радиуса R_1 с центром в m_1 (и которая лежит внутри сферы Ляпунова с центром в m_1). Очевидно, что (Σ_1) содержит (Σ) .

Оценим площадь части (Σ_1) внешней к (Σ) . Так как $\cos(N_1 N) > \frac{1}{2}$, то эта площадь не превосходит удвоенной площади проекции этой части на плоскость (ξ, η) , которая, очевидно, заключена в круговом кольце радиусов R_2 и R_1 с центром m_1 . Поэтому площадь $(\Sigma_1 - \Sigma)$ не превосходит $2\pi(R_1^2 - R_2^2)$. Покажем, что последняя величина не превосходит числа вида $c\delta^3$. Для этого предварительно изучим разность $T_1^2 - T_0^2$ на части (Σ_1) , лежащей вне сферы $r_0 = 2\delta$. Имеем на основании формулы (7)

$$T_1^2 - T_0^2 = \frac{\rho_1^2}{r_1^2} - \frac{\rho^2}{r_0^2} = \sin^2(r_1 N_1) - \sin^2(r_0 N_0) = \cos^2(r_0 N_0) - \cos^2(r_1 N_1) = [\cos(r_0 N_0) - \cos(r_1 N_1)] [\cos(r_0 N_0) + \cos(r_1 N_1)],$$

причем, для определенности, будем считать r_0 и r_1 направленными из m в m_0 и m_1 .

Далее имеем, в силу неравенства (17) § 1 (I),

$$|\cos(r_0 N_0)| < Er^\lambda < 2^\lambda E\rho^\lambda;$$

в силу неравенства (9) § 2 (II) имеем вне сферы $r_0 = 2\delta$:

$$\frac{r_0}{2} < r_1 < \frac{3}{2} r_0, \text{ и поэтому}$$

$$|\cos(r_1 N_1)| < Er_1^\lambda < \left(\frac{3}{2}\right)^\lambda Er^\lambda < 3^\lambda E\rho^\lambda.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} |\cos(r_0 N_0) - \cos(r_1 N_1)| &\leq |\cos(r_0 N_0) - \cos(r_0 N_1)| + \\ &+ |\cos(r_0 N_1) - \cos(r_1 N_1)| < (N_0 N_1) + (r_0 r_1) < E\delta^\lambda + (r_0 r_1). \end{aligned}$$

Из треугольника $m_0 m_1 m$ следует

$$\frac{\sin(r_0 r_1)}{\delta} = \frac{\sin(r_1 r_{01})}{r_0}$$

и, следовательно,

$$\sin(r_0 r_1) \leq \frac{\delta}{r_0} \leq \frac{\delta}{\rho}.$$

Так как сторона $m_0 m_1$ наименьшая из сторон треугольника $m_0 m_1 m$, то угол $(r_0 r_1)$ острый, и поэтому имеем:

$$(r_0 r_1) < \frac{\pi}{2} \sin(r_0 r_1) < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\delta}{\rho}.$$

Из всех этих оценок следует:

$$|T_1^2 - T_0^2| < \left[E\delta' + \frac{\pi}{2} \frac{\delta}{\rho} \right] E\rho' (3' + 2') = c_1 \delta^{\lambda} \rho^{\lambda} + c_2 \delta \rho^{\lambda-1}.$$

Так как $\frac{1}{2} \leq \frac{\rho}{r_0} \leq 1$, $\frac{1}{2} \leq \frac{r_1}{r_1} \leq 1$, то $\frac{1}{2} \leq T_0 < 1$ и $\frac{1}{2} \leq T_1 \leq 1$. Отсюда следует $T_1 + T_0 \geq 1$, и поэтому на основании предыдущего неравенства

$$|T_1 - T_0| \leq |T_1^2 - T_0^2| < c_1 \delta^{\lambda} \rho^{\lambda} + c_2 \delta \rho^{\lambda-1}. \quad (17)$$

Так как $T_0 + T_1 \leq 2$, то

$$|T_1^3 - T_0^3| < |(T_1^2 - T_0^2)(T_1 + T_0)| < 2c_1 \delta^{\lambda} \rho^{\lambda} + 2c_2 \delta \rho^{\lambda-1}. \quad (18)$$

Пусть m некоторая точка контура (Σ) . Она лежит вне сферы $r_0 = 2\delta$, так как $\delta < \frac{d}{4}$. Поэтому для нее имеет место неравенство (17). Имеем для этой точки:

$$\begin{aligned} \rho_1 = r_1 \sin(r_1 N_1) &= r_1 T_1 < (r_0 + \delta) T_1 = r_0 T_0 + r_0 (T_1 - T_0) + \delta T_1 < \\ < \frac{d}{2} + d \left[c_1 \delta^{\lambda} \left(\frac{d}{2} \right)^{\lambda} + c_2 \delta \left(\frac{d}{2} \right)^{\lambda-1} \right] + \delta &= \frac{d}{2} + c_3 \delta^{\lambda} + c_4 \delta < \frac{d}{2} + c_5 \delta^{\lambda} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$R_1 = \max \rho_1 \leq \frac{d}{2} + c_5 \delta^{\lambda}.$$

Аналогично находим

$$\rho_1 = r_1 \sin(r_1 N_1) = r_1 T_1 \geq (r_0 - \delta) T_1 > \frac{d}{2} - c_3 \delta^2 - c_4 \delta > \frac{d}{2} - c_5 \delta^\lambda$$

и, следовательно,

$$R_2 = \min \rho_1 \geq \frac{d}{2} - c_5 \delta^\lambda.$$

Поэтому

$$0 \leq R_1^2 - R_2^2 \leq 2dc_5 \delta^\lambda$$

и, следовательно, площадь $(\Sigma_1 - \Sigma)$ не превосходит числа вида $c\delta^\lambda$.

Так как на $(\Sigma_1 - \Sigma)$ r_1 превосходит $\frac{d}{4}$ и ρ_1 превосходит $\frac{d}{8}$, то на $(\Sigma_1 - \Sigma)$ ограничены функции

$$\frac{x - x_1}{r_1^3}, \quad \left(\frac{T_1}{\gamma_1} - 1 \right) \frac{(x - x_1) \gamma_1}{\rho_1^3},$$

и поэтому первые три интеграла в (15) изменяются на величину, не превосходящую числа вида $cA\delta^\lambda$, если в них заменить (Σ_1) на (Σ) .

Таким образом, осталось изучить разность между (16) и

$$\begin{aligned} \int_{(\Sigma - \Sigma)} \mu \frac{x - x_1}{r_1^3} d\sigma + \int_{(\Sigma)} (\mu - \mu_1) \frac{x - x_1}{r_1^3} d\sigma + \\ + \mu_1 \int_{(\Sigma)} \left(\frac{T_1}{\gamma_1} - 1 \right) \frac{(x - x_1) \gamma_1}{\rho_1^3} d\sigma. \end{aligned} \quad (19)$$

Очевидно, модуль разности первых интегралов (16) и (19) не превосходит числа вида $cA\delta$.

Так как $|\mu_1 - \mu_0| < A\delta^\lambda$, а третий интеграл в (16) ограничен, то разность третьих слагаемых в (16) и (19) отличается от произведения μ_1 на разность третьих интегралов числом вида $cA\delta^\lambda$; далее будет показано, что модуль разности третьих интегралов не превосходит $c\delta^{\lambda'}$, ($\lambda' < \lambda$). Отсюда будет следовать, что модуль разности третьих слагаемых в (16) и (19) не превосходит $cA\delta^{\lambda'}$.

Пусть (σ) означает часть (Σ) , проектирующуюся на плоскость (xy) в круг радиуса 2δ с центром в m_0 . Тогда легко видеть, что интегралы по (σ) от функций вторых и третьих

интегралов (16) и (19) не превосходят по модулю чисел вида $cA\delta^\lambda$. Остается изучить разности соответствующих интегралов по $(\Sigma - \sigma)$. Сначала займемся разностью вторых интегралов. Так как на $(\Sigma - \sigma)$ имеем

$$\frac{1}{r_1} < \frac{2}{r_0} < \frac{2}{\rho},$$

то

$$\begin{aligned} \left| (\mu - \mu_1) \frac{x - x_1}{r_1^3} - (\mu - \mu_0) \frac{x}{r_0^3} \right| &= \left| (\mu - \mu_0) x \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) - \right. \\ &\quad \left. - (\mu - \mu_0) \frac{x_1}{r_1^3} + (\mu_0 - \mu_1) \frac{x - x_1}{r_1^3} \right| < Ar_0' \cdot \rho \frac{\delta}{\rho^4} + \\ &\quad + Ar_0' \frac{8\delta}{\rho^3} + A\delta' \frac{4}{\rho^2} < (c_1\delta\rho'^{-3} + 4\delta^\lambda\rho^{-2}) A, \end{aligned}$$

и, следовательно, модуль разности вторых интегралов по $(\Sigma - \sigma)$ не превосходит

$$\begin{aligned} 4\pi A \left[c_1\delta \int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{d}{2}} \rho^{\lambda-1} \rho \, d\rho + 4\delta' \int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{\rho \, d\rho}{\rho^2} \right] < \\ < c_2\delta' + 4\delta' \ln \frac{d}{\delta} < c_3\delta'^{\lambda'}, \quad (\lambda' < \lambda). \end{aligned}$$

Остается изучить разность третьих интегралов (16) и (19) [интегралов по $(\Sigma - \sigma)$].

Прежде всего заметим, что на $(\Sigma - \sigma)$

$$\rho_1 = r_1 T_1 \geq \frac{1}{2} r_1 > \frac{1}{2} \frac{r_0}{2} = \frac{r_0}{4} \geq \frac{\rho}{4}$$

и

$$\rho_1 = r_1 T_1 \leq r_1 \leq \frac{3}{2} r_0 \leq \frac{3}{2} \cdot 2\rho = 3\rho,$$

и, таким образом,

$$\frac{\rho}{4} \leq \rho_1 \leq 3\rho. \quad (20)$$

Затем, в силу неравенства (17),

$$\begin{aligned} | \rho_1 - \rho | &= | r_1 T_1 - r_0 T_0 | = | (r - r_0) T_1 + r (T_1 - T_0) | < \\ &< \delta + 2\rho (c_1\delta^\lambda\rho^\lambda + c_2\delta\rho^{\lambda-1}) = \delta (1 + 2c_2\rho^\lambda) + \\ &\quad + \delta^\lambda 2c_1\rho^\lambda \cdot \rho < c_3\delta + c_4\rho\delta^\lambda, \end{aligned}$$

и поэтому, в силу (20),

$$\left| \frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho^3} \right| = \frac{|\rho - \rho_1|}{\rho \rho_1} \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_1 \rho} + \frac{1}{\rho^2} \right) < \frac{84(c_3 \delta + c_4 \rho \delta^\lambda)}{\rho^4}. \quad (21)$$

Далее, так как $T_0 + 1 \geq \frac{3}{2} > 1$,

$$\begin{aligned} |T_0 - 1| &= \frac{|T_0^2 - 1|}{T_0 + 1} < |T_0^2 - 1| = \\ &= \cos^2(r_0 N_0) < E^2 r_0'^2 \leq (E^2 r_0') \cdot (2\rho)^2 \leq c_5 \rho^2 \end{aligned}$$

и в силу того, что $T_0^2 + T_0 + 1 \leq 3$, имеем:

$$|T_0^3 - 1| \leq 3c_5 \rho^2.$$

Поэтому, так как $1 - \gamma < E(2\rho)^2$, имеем:

$$|T_0^3 - \gamma| \leq |T_0^3 - 1| + |1 - \gamma| < c_5' \rho^2, \quad (22)$$

и аналогично

$$|T_1^3 - \gamma_1| < c_5' \rho_1^2 < c_6 \rho^2; \quad (22')$$

кроме того,

$$|\gamma - \gamma_1| = |\cos(NN_0) - \cos(NN_1)| < (N_0 N_1) < E\delta. \quad (22'')$$

Используя неравенства (18), (20) — (22''), а также $|x| < \rho$, $|x_1| < \delta$, получим на $(\Sigma - \tau)$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{T_1^3 - \gamma_1}{\rho_1^3} (x - x_1) - \frac{T_0^3 - \gamma}{\rho^3} x \right| &\leq \left| x_1 \frac{T_1^3 - \gamma_1}{\rho_1^3} \right| + \\ &+ \left| x \frac{(T_1^3 - T_0^3) + (\gamma - \gamma_1)}{\rho_1^3} \right| + \left| x \left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho^3} \right) (T_0^3 - \gamma) \right| \leq \\ &\leq \delta \frac{64c_6 \rho^2}{\rho^3} + \rho \frac{64[(2c_1 \delta^2 \rho^2 + 2c_2 \delta \rho^{2-1}) + E\delta^2]}{\rho^3} + \\ &+ \rho \frac{84(c_3 \delta + c_4 \rho \delta^\lambda)}{\rho^4} \cdot 2c_5 \rho^2 = \delta \rho^{2-3} (64c_6 + 128c_2 + 168c_5) + \\ &+ \delta^2 \rho^{-2} (128c_1 \rho^2 + 64E + 168c_4 \rho^2) < c_7 \delta \rho^{2-3} + c_8 \delta^2 \rho^{-2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что интеграл по $(\Sigma - \sigma)$ от левой части последнего неравенства не превосходит

$$4\pi c_7 \delta \int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{d}{2}} \rho^{1-2} \rho \, d\rho + 4\pi c_8 \delta^\lambda \int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{d}{2}} \rho^{-2} \rho \, d\rho < \\ < \frac{4\pi c_7}{1-\lambda} + 4\pi c_8 \log \frac{d}{4\delta} < c_9 \delta^\lambda + c'_9 \delta^{\lambda'} < c_{10} \delta^{\lambda'}.$$

Таким образом теорема доказана.

II. ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА ОТНОСИТЕЛЬНО НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ

1. Теорема I. Если имеет место одно из следующих условий:

1°. μ — непрерывна на (S) , причем $(N_1, N_2) < Er$, [r — расстояние двух точек m_1 и m_2 поверхности (S) , N_1 и N_2 — нормали к (S) в этих точках], то

2°. имеем:

$$|\mu_{m_1} - \mu_{m_2}| < Ar, \quad (N_1, N_2) < Er^\lambda;$$

и если потенциал

$$W = \int_{(S)} \mu \frac{\cos(rN)}{r^2} d\sigma \quad (1)$$

имеет одну из производных

$$\frac{dW_i}{dn}, \quad \frac{dW_e}{dn}, \quad (2)$$

то он имеет и другую, и

$$\frac{dW_i}{dn} = \frac{dW_e}{dn}.$$

Если μ_0 — значение μ в m_0 , то мы имеем:

$$W = \int_{(S)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(rN)}{r^2} d\sigma + \mu_0 \int_{(S)} \frac{\cos(rN)}{r^2} d\sigma = \\ = \int_{(S)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(rN)}{r^2} d\sigma + \mu_0 \eta, \quad \eta = 4\pi \text{ в } (D_i), \quad \eta = 0 \text{ в } (D_e);$$

отсюда следует, что если существует производная в m_0 , то

$$\frac{dW}{dn} = \frac{d}{dn} \int_{(S)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(rN)}{r^2} d\sigma.$$

Возьмем за ось m_0z нормаль N_0 к (S) в m_0 . Пусть (Σ) — часть (S) , вырезаемая круговым цилиндром с осью N_0 , имеющим радиус d . Мы можем написать:

$$|\zeta| < ap^{1+\lambda}, \quad (\lambda \leq 1),$$

обозначая через (ξ, η, ζ) координаты точки m на (S) , через ρ — проекцию на плоскость XY расстояния r между m_0 и m . Выберем такое d , чтобы выполнялось неравенство

$$ad^3 < \frac{1}{4}.$$

Но, принимая во внимание, что

$$\frac{dW}{dn} = \frac{d}{dn} \int_{(\Sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(rN)}{r^2} d\sigma + \frac{d}{dn} \int_{(S-\Sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(rN)}{r^2} d\sigma$$

и что является очевидным существование производной второго члена в окрестности m_0 , нам достаточно заняться производными первого члена. Вследствие сделанного нами выбора системы координат, мы имеем:

$$\frac{d}{dn} \int_{(\Sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(rN)}{r^2} d\sigma = \frac{\partial}{\partial z} \int_{(\Sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(rN)}{r^2} d\sigma$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \int_{(\Sigma)} (\mu - \mu_0) \frac{\cos(rN)}{r^2} d\sigma &= \\ &= \int_{(\Sigma)} (\mu - \mu_0) \left\{ \frac{\partial \cos(rN)}{\partial z} \frac{1}{r^2} + \frac{2 \cos(rN) \cos(rz)}{r^3} \right\} d\sigma; \end{aligned}$$

учитывая, что

$$\cos(rN) = \frac{\xi}{r} \cos(Nx) + \frac{\eta}{r} \cos(Ny) + \frac{z}{r} \cos(Nz),$$

где

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2,$$

деляемые точкой m_0 и плоскостью XY , имеем:

$$\begin{aligned}\Omega(z, 0) - \Omega(z, R) &= \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\mu - \mu_0}{r^3} \left\{ \frac{3 \cos(rz) \cos(rN)}{(\cos Nz)} - 1 \right\} \rho \, d\rho.\end{aligned}$$

Займемся функцией под знаком интеграла. Имеем:

$$\frac{1}{r^3} \left\{ \frac{3 \cos(rz) \cos(rN)}{\cos(Nz)} - 1 \right\} = \frac{1}{r^4} \left\{ \frac{3 \cos(rz) r \cos(rN)}{\cos(Nz)} - r \right\}.$$

Для точки внутри (D) (рис. 33)

$$r \cos(rN) = r_0 \cos(r_0 N) + |z| \cos(Nz) = r_0 \cos(r_0 N) - z \cos(Nz),$$

для точки вне (D)

$$r \cos(rN) = r_0 \cos(r_0 N) - |z| \cos(Nz) = r_0 \cos(r_0 N) - z \cos(Nz).$$

Отсюда следует, что во всех случаях

$$\begin{aligned}\frac{3 \cos(rz) r \cos(rN)}{\cos(Nz)} - r &= \frac{3 \cos(rz) r_0 \cos(r_0 N)}{\cos(Nz)} - 3 \cos(rz) z - r = \\ &= \frac{3(\zeta - z) r_0 \cos(r_0 N)}{r \cos(Nz)} - \frac{3(\zeta - z) z + r^2}{r} = \\ &= \frac{3(\zeta - z) r_0 \cos(r_0 N)}{r \cos(Nz)} - \frac{3(\zeta - z) z + \rho^2 + (\zeta - z)^2}{r} = \\ &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{3(\zeta - z) r_0 \cos(r_0 N)}{\cos(Nz)} - \zeta z - \zeta^2 - \rho^2 + 2z^2 \right\},\end{aligned}$$

так как

$$\zeta^2 + \eta^2 = \rho^2.$$

Итак, мы имеем:

$$\begin{aligned}\Omega(z, 0) - \Omega(z, R) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (\mu - \mu_0) \left\{ -\frac{\rho^2 - 2z^2}{r^5} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^5} \left[\frac{3(\zeta - z) r_0 \cos(r_0 N)}{\cos(Nz)} - \zeta z - \zeta^2 \right] \right\} \rho \, d\rho.\end{aligned}\quad (4)$$

Положим

$$r_1 = \sqrt{\rho^2 + z^2}.$$

Имеем:

$$r^2 - r_1^2 = \rho^2 + (\zeta - z)^2 - \rho^2 - z^2 = \zeta^2 - 2\zeta z$$

и

$$\begin{aligned}
 |r^2 - r_1^2| &< a^2 \rho^2 \rho^{2\lambda} + 2a \rho \rho^\lambda |z|, \\
 r^2 &= r_1^2 + \theta (a^2 \rho^2 \rho^{2\lambda} + 2a \rho \rho^\lambda |z|), \quad |\theta| < 1, \\
 r &= r_1 \sqrt{1 + \frac{\theta (a^2 \rho^2 \rho^{2\lambda} + 2a \rho \rho^\lambda |z|)}{r_1^2}} = \\
 &= r_1 \sqrt{1 + \theta_1 \left(a^2 \rho^{2\lambda} + 2a \rho^\lambda \frac{|z|}{r_1} \right)}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что на основании свойств выбранной нами части поверхности (Σ) , второй член под радикалом меньше

$$\frac{1}{16} + 2 \times \frac{1}{4} < \frac{3}{4};$$

следовательно,

$$\frac{1}{r^5} = \frac{1}{r_1^5} + g \frac{a^2 \rho^{2\lambda} + 2a \rho^\lambda \frac{|z|}{r_1}}{r_1^5}, \quad \frac{1}{r^5} = \frac{h}{r_1^5},$$

где g и h — ограниченные функции.

Итак, равенство (4) может быть написано в следующей форме:

$$\begin{aligned}
 \Omega(z, 0) - \Omega(z, R) &= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (\mu - \mu_0) \frac{\rho^2 - 2z^2}{r_1^5} \rho d\rho + \\
 &+ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (\mu - \mu_0) \frac{Q}{r_1^5} \rho d\rho; \quad (5)
 \end{aligned}$$

здесь

$$\begin{aligned}
 Q &= -g \left(a^2 \rho^{2\lambda} + 2a \frac{\rho^\lambda |z|}{r_1} \right) (\rho^2 - 2z^2) + \\
 &+ h \left\{ \frac{3(\zeta - z) r_0 \cos(r_0 N)}{\cos(Nz)} - \zeta z - \frac{z^2}{2} \right\}.
 \end{aligned}$$

Определим верхнюю границу Q . Оценивая каждый член Q , мы находим:

$$\rho^2 \rho^{2\lambda}, \quad \rho \rho^\lambda |z|, \quad \rho^{2\lambda} |z|^2, \quad \rho^\lambda |z|^2, \quad \rho^2 \rho^{2\lambda}, \quad \rho \rho^\lambda |z|, \quad \rho \rho^\lambda |z|, \quad \rho^2 \rho^{2\lambda}.$$

В самом деле,

$$|\cos(r_0 N)| < b \rho^\lambda, \quad r_0 < 2\rho, \quad \left(\rho = r_0 \cos \alpha, \quad \cos \alpha > \frac{1}{2} \right).$$

Отсюда следует, что

$$|Q| < A\rho^2\rho^{2\lambda} + B\rho\rho^\lambda |z| + C\rho^\lambda |z|^2,$$

где A, B, C — определенные числа.

Обратимся к сделанным в условии теоремы предположениям; возможно выбрать R настолько малым, чтобы было

$$\left. \begin{aligned} |\mu - \mu_0| < \varepsilon, \quad (NN_0) < b\rho, \quad \lambda = 1 \quad \text{в случае } 1^\circ, \\ |\mu - \mu_0| < a\rho, \quad (NN_0) < b\rho^\lambda < \varepsilon \quad \text{в случае } 2^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В обоих этих случаях

$$|\mu - \mu_0| |Q| < \varepsilon \{A\rho^3\rho^\lambda + B\rho^2|z| + C\rho|z|^2\}.$$

Для оценки второго члена в (5) следует вычислить интегралы

$$A \int_0^R \frac{\rho^4 \rho^\lambda d\rho}{r_1^5}, \quad B|z| \int_0^R \frac{\rho^3 d\rho}{r_1^5}, \quad C|z|^2 \int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{r_1^5}. \quad (7)$$

Находим

$$\int_0^R \frac{\rho^4 \rho^\lambda d\rho}{r_1^5} < \int_0^R \frac{\rho^\lambda d\rho}{\rho} = \frac{1}{\lambda} R^\lambda,$$

$$|z| \int_0^R \frac{\rho^3 d\rho}{r_1^5} < |z| \int_0^R \frac{\rho d\rho}{V(\rho^2 + z^2)^3} = |z| \left\{ \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right\} < 1,$$

$$|z|^2 \int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{r_1^5} < |z|^2 \int_0^R \frac{d\rho}{V(\rho^2 + z^2)^3} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \Big|_0^R = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} < 1.$$

Таким образом, все интегралы (7) ограничены и, кроме того,

$$\Omega(z, 0) - \Omega(z, R) = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (\mu - \mu_0) \frac{\rho^2 - 2z^2}{r_1^5} \rho d\rho + \varepsilon K_1, \quad (8)$$

где K_1 — ограниченная функция.

Заменяя в (7) z на $-z$, мы получаем:

$$\begin{aligned} \Omega(-z, 0) - \Omega(-z, R) = & - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \times \\ & \times (\mu - \mu_0) \frac{z^2 - 2z^2}{r_1^5} \rho d\rho + \varepsilon K_2, \end{aligned}$$

откуда

$$\Omega(z, 0) - \Omega(-z, 0) = \Omega(z, R) - \Omega(-z, R) + \varepsilon(K_1 - K_2);$$

выбрав R , выберем z так, чтобы было

$$|\Omega(z, R) - \Omega(-z, R)| < \varepsilon;$$

это возможно, так как $\Omega(z, R)$ стремится к пределу, когда z стремится к нулю. Отсюда следует, что

$$|\Omega(z, 0) - \Omega(-z, 0)| < \varepsilon L, \quad L = 1 + |K_1| + |K_2|.$$

Последнее равенство показывает, что если одно из количеств

$$\Omega(z, 0), \quad \Omega(-z, 0)$$

стремится к пределу, когда z стремится к нулю, то другое стремится к пределу, равному первому, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Если в случае 2° имеем $(N_1, N_2) < \varepsilon \rho^\lambda$, то можно даже предположить, что

$$|\mu - \mu_0| < \alpha \varepsilon |\log \rho|.$$

В самом деле, полагая

$$b \rho^\lambda = b \rho^{\lambda - \eta} \rho^\eta,$$

можно выбрать R достаточно малым, чтобы $b \rho^{\lambda - \eta}$ было меньше ε , и использовать множитель ρ^η , чтобы $\rho^\eta \log \rho$ стало ограниченным. Заменяя ρ^λ через $\rho^{\lambda - \eta}$, мы сохраняем форму неравенства, полученного для $|Q|$.

2. Считая, что точка (x_0, y_0, z_0) находится на границе (σ_0) , положим:

$$x_0 = R \cos \varphi, \quad y_0 = R \sin \varphi.$$

Т е о р е м а II. Если плотность μ потенциали двойного слоя (1)

$$W = \int_{(S)} \mu \frac{\cos(rN)}{r^2} d\sigma$$

удовлетворяет одному из условий теоремы I, и если условие Ляпунова

$$\left| \int_0^{2\pi} (\mu - \mu_0) d\varphi \right| < a\rho^{1+\gamma}, \quad (0 < \gamma) \quad (9)$$

удовлетворено, то потенциал W имеет в точке m_0 нормальную производную.

З а м е ч а н и е. Обобщая условие 2°, можно положить:

$$|\mu_{m_1} - \mu_{m_2}| < Ar |\log r|, \quad \text{если } (N_1, N_2) < \varepsilon r^\lambda.$$

Неравенство (9) позволяет оценить первый интеграл в формуле (5)

$$\begin{aligned} \Omega(z, 0) - \Omega(z, R) = \\ = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (\mu - \mu_0) \frac{\rho^2 - 2z^2}{r_1^5} \rho d\rho + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (\mu - \mu_0) \frac{Q}{r_1^5} \rho d\rho. \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (\mu - \mu_0) \frac{\rho^2 - 2z^2}{r_1^5} \rho d\rho \right| = \\ & = \left| \int_0^R \frac{\rho^2 - 2z^2}{r_1^5} \rho \left(\int_0^{2\pi} (\mu - \mu_0) d\varphi \right) d\rho \right| < \\ & < \int_0^R \frac{|\rho^2 - 2z^2|}{r_1^5} \rho \left(\left| \int_0^{2\pi} (\mu - \mu_0) d\varphi \right| \right) d\rho < \\ & < a \int_0^R \frac{|\rho^2 - 2z^2| \rho^{2+\gamma}}{r_1^5} d\rho < 3a \int_0^R \frac{\rho^\gamma}{\rho} d\rho = \frac{3a}{\gamma} R^\gamma. \end{aligned}$$

В самом деле,

$$\left| \frac{\rho^4}{r_1^4} \right| < 1, \quad \left| \frac{z^2 \rho^2}{r_1^4} \right| < 1.$$

Обращаясь вновь к оценке, найденной для $|Q|$, и обозначая через ε верхнюю границу $|\mu - \mu_0|$ и, соответственно, —

верхнюю границу $a\rho^\lambda$ или $a\rho^\lambda$ на (z_0) , мы заключаем, что

$$|\Omega(z, 0) - \Omega(z, R)| < \frac{3a}{\sqrt{\gamma}} R^\gamma + \varepsilon K. \quad (10)$$

Рассмотрим круговой цилиндр с осью N_0 и радиусом $R_1 < R$. Пусть (σ_1) — вырезаемая им часть (S) ; обозначим через $\Omega(z, R_1)$ интеграл (3), взятый по $(\Sigma - \sigma_1)$.

Интеграл (3), взятый по поверхности между двумя цилиндрами, равен

$$\begin{aligned} \Omega(z, R_1) - \Omega(z, R) = \\ = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^R \frac{(\rho^2 - 2z^2)\rho}{r_1^5} (\mu - \mu_0) d\rho + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^R (\mu - \mu_0) \frac{Q}{r_1^5} \rho d\rho. \end{aligned}$$

При $z=0$ последнее равенство дает:

$$\begin{aligned} \Omega(0, R_1) - \Omega(0, R) = \\ = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^R \frac{(\mu - \mu_0) d\rho}{\rho^2} + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^R \frac{(\mu - \mu_0) \theta A \rho^{2\lambda}}{\rho^2} d\rho, \end{aligned}$$

так как при $z=0$

$$r_1 = \rho, \quad Q = \theta A \rho^2 \rho^{2\lambda}, \quad (|\theta| < 1).$$

Во втором члене

$$|\mu - \mu_0| \theta A \rho^{2\lambda} < \varepsilon A \rho \rho^\lambda,$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^R \frac{(\mu - \mu_0) \theta A \rho^{2\lambda}}{\rho^2} d\rho \right| < 2\pi \varepsilon A \int_{R_1}^R \frac{\rho^\lambda}{\rho} d\rho = \\ = \frac{2\pi \varepsilon A}{\lambda} (R^\lambda - R_1^\lambda) < c \varepsilon R^\lambda. \end{aligned}$$

Пользуясь условием Ляпунова, получаем для первого члена:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^R \frac{(\mu - \mu_0) d\rho}{\rho^2} \right| = \left| \int_{R_1}^R \frac{d\rho}{\rho^2} \int_0^{2\pi} (\mu - \mu_0) d\varphi \right| < \\ < \int_{R_1}^R \frac{d\rho}{\rho^2} \left| \int_0^{2\pi} (\mu - \mu_0) d\varphi \right| < a \int_{R_1}^R \frac{\rho^\gamma d\rho}{\rho} = \frac{a}{\gamma} (R^\gamma - R_1^\gamma) < \frac{a}{\gamma} R^\gamma, \end{aligned}$$

Отсюда следует, что мы имеем, не вводя R_1 в правую часть неравенства:

$$|\Omega(0, R_1) - \Omega(0, R)| < aR^\nu + \varepsilon bR^\lambda. \quad (11)$$

Ввиду того, что правая часть (11) становится бесконечно малой вместе с R , мы выводим, что $\Omega(0, R)$ стремится к пределу при R , стремящемся к нулю. Пусть этот предел равен L .

$$\lim \Omega(0, R) = L, \quad \text{если } R \rightarrow 0.$$

При R_1 , стремящемся к нулю, мы получаем из (11):

$$|\Omega(0, R) - L| < aR^\nu + \varepsilon bR^\lambda. \quad (12)$$

Изучим теперь разность

$$\Omega(z, 0) - L$$

интеграла

$$\frac{dW}{dn} = \frac{d}{dn} \int_{(S)} (v - v_0) \frac{\cos(rN)}{r^2} d\tau,$$

взятого в точке m , и только что найденного нами числа L .

Имеем:

$$\begin{aligned} \Omega(z, 0) - L &= [\Omega(z, 0) - \Omega(z, R)] + \\ &+ [\Omega(0, R) - L] + [\Omega(z, R) - \Omega(0, R)] \end{aligned}$$

и, благодаря неравенствам (10) и (12),

$$|\Omega(z, 0) - L| \leq aR^\nu + \varepsilon K + \varepsilon bR^\lambda + |\Omega(z, R) - \Omega(0, R)|.$$

При произвольно выбранном ε , R было так выбрано, чтобы удовлетворялись неравенства (6); предположим, кроме того, что

$$aR^\nu < \varepsilon.$$

Получаем:

$$|\Omega(z, 0) - L| < \varepsilon B + |\Omega(z, R) - \Omega(0, R)|.$$

Сохраняя значение, выбранное для R , мы можем предполагать z настолько малым, чтобы разность

$$|\Omega(z, R) - \Omega(0, R)|$$

была меньше ε . Отсюда следует, что

$$|\Omega(z, 0) - L| < C\varepsilon \quad \text{при } |z| < z_0$$

и что

$$\lim \Omega(z, 0) = L, \quad (z \rightarrow 0),$$

т. е. что $\frac{dW}{dn}$ стремится к определенному пределу, когда точка m нормали N_0 к (S) в m_0 стремится к m_0 , что и требовалось доказать.

III. ТЕОРЕМА О ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НЬЮТОНОВА ПОТЕНЦИАЛА

Теорема. Если плотность μ ньютонова потенциала определена и правильно непрерывна в конечной области (D) , ограниченной конечным числом замкнутых поверхностей Ляпунова, то вторые производные потенциала правильно непрерывны в (D) и вне (D) .

Доказательство разобьем на две части: 1) докажем правильную непрерывность вторых производных в (D) , которую будем называть (D_i) , и 2) докажем правильную непрерывность вторых производных в (D_e) .

1. Приступая к доказательству, напомним, что из формулы (61) гл. II, если положить в последней $\mu = 1$, следует:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{(D_i)} \frac{d\tau_2}{r_{20}} = - \int_{(\zeta)} \cos(Nx) \frac{d\sigma_2}{r_{20}} \quad (1)$$

и эта формула справедлива, если m_0 в (D_i) или в (D_e) .

Существование в (D_i) вторых производных ньютонова потенциала с правильно непрерывной плотностью было доказано в § 14 (II) и там же было дано их явное выражение. Мы воспользуемся замечанием конца § 14 и выберем в качестве области (D_0) всю область (D) . Тогда, например, для $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ получим следующее выражение:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{(D_i)} \frac{d\tau_2}{r_{20}} + \int_{(D)} (\mu - \mu_0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r_{20}} d\tau \quad (2)$$

или, если воспользоваться формулой (1),

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_{(\zeta)} \cos(Nx) \frac{d\sigma_2}{r_{20}} + \int_{(D)} (\mu - \mu_0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r_{20}} d\tau. \quad (3)$$

На основании теоремы § 7(II) заключаем, что правая часть (1), как потенциал простого слоя с правильно непрерывной плотностью — $\cos(Nx)$, имеет правильно непрерывные первые производные в (D_i) и в (D_e) . Отсюда следует, что первое слагаемое правой части (3) есть правильно непрерывная функция в (D_i) , как произведение двух правильно непрерывных и ограниченных функций. Остается доказать правильную непрерывность второго слагаемого правой части (3). Для краткости дальнейшей записи обозначим:

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r_{20}}}{\partial x^2} = f(m_0, m), \quad (4)$$

где $m(\xi, \eta, \zeta)$ — точка интегрирования.

Таким образом, докажем правильную непрерывность интеграла

$$\varphi(m_0) = \int_{(D)} (\mu - \mu_0) f(m_0, m) d\tau. \quad (5)$$

Пусть теперь m_0 и m_1 две точки области (D_i) , расстояние между которыми обозначим δ . Через $(D, 2\delta)$ обозначим часть области (D) , лежащую внутри шара (2δ) радиуса 2δ с центром в m_0 . Имеем.

$$\begin{aligned} \varphi(m_1) - \varphi(m_0) &= \int_{(D)} (\mu - \mu_1) f(m_1, m) d\tau - \\ &- \int_{(D)} (\mu - \mu_0) f(m_0, m) d\tau = \int_{(D, 2\delta)} (\mu - \mu_1) f(m_1, m) d\tau - \\ &- \int_{(D - (D, 2\delta))} (\mu - \mu_0) f(m_0, m) d\tau + \int_{(D - (D, 2\delta))} [(\mu - \mu_1) f(m_1, m) - \\ &- (\mu - \mu_0) f(m_0, m)] d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

Первый и второй интегралы правой части равенства (6) не превосходят по модулю чисел вида $cA\delta^3$. Действительно, очевидно $|f(m_0, m)| < \frac{4}{r_0^3}$ и $|f(m_1, m)| < \frac{4}{r_1^3}$, где r_0 и r_1 —

расстояния точки m до m_0 и m_1 . Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int_{(D, 2\delta)} (\mu - \mu_0) f(m_0, m) d\tau \right| &< 4A \int_{(D, 2\delta)} r_0^2 \frac{1}{r_0^3} d\tau < \\ &< 4A \int_{(2\delta)} r_0^2 d\tau = \frac{16\pi 2^\lambda}{r} A \delta^2; \end{aligned}$$

аналогично оценивается первый интеграл, если учесть, что $(D, 2\delta)$ лежит в шаре радиуса 3δ с центром в m_1 . Остается оценить последний интеграл правой части (6). Для этого заметим, что вне шара (2δ) имеем:

$$\frac{1}{2} r_0 < r' < \frac{3}{2} r_0,$$

где r' — расстояние точки m до любой точки отрезка $m_0 m_1$. Кроме того, на основании (4) имеем:

$$\begin{aligned} f(m_1, m) - f(m_0, m) &= \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} \right)_{m'} (x_1 - x_0) + \\ &+ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y} \frac{1}{r} \right)_{m'} (y_1 - y_0) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial z} \frac{1}{r} \right)_{m'} (z_1 - z_0), \end{aligned}$$

откуда находим:

$$|f(m_1, m) - f(m_0, m)| < \delta \frac{c}{r'^4} < \frac{16c\delta}{r_0^4}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} |(\mu - \mu_1) f(m_1, m) - (\mu - \mu_0) f(m_0, m)| &< \\ < |(\mu - \mu_0) [f(m_1, m) - f(m_0, m)]| + |(\mu_0 - \mu_1) f(m_1, m)| < \\ &< \frac{Ar_0^2 16c\delta}{r_0^3} + A\delta^2 \frac{32}{r_0^3}. \end{aligned}$$

Пусть R означает диаметр области (D) . Тогда из последнего неравенства находим, что модуль третьего интеграла

правой части (6) не превосходит

$$4\pi \left[16cA\delta \int_{\frac{2\delta}{R}}^R r_0^{\lambda-4} r_0^2 dr_0 + 32A\delta^\lambda \int_{\frac{2\delta}{R}}^R r_0^3 r_0^2 dr_0 \right] = \\ = A \left[\frac{64\pi c}{1-\lambda} \left(\delta^\lambda - \frac{\delta}{R^{1-\lambda}} \right) + 128\pi\delta^\lambda \ln \frac{R}{2\delta} \right] < c_1 A \delta^{\lambda'},$$

и, таким образом, функция $\varphi(m_0)$ есть правильно непрерывная функция в (D_i) .

Этим самым завершено доказательство первой части теоремы о правильной непрерывности вторых производных потенциала в (D_i) .

Прежде чем переходить ко второй части, заметим, что при изучении разности (6) ничто не мешало точки m_0 и m_1 считать принадлежащими границе (S) области (D_i) ; поэтому $\varphi(m_0)$ есть правильно непрерывная функция на (S) . Этим замечанием воспользуемся при доказательстве второй части теоремы.

2. Докажем, что вторые производные ньютонова потенциала с правильно непрерывной плотностью правильно непрерывны в (D_e) . Для доказательства заметим, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{(D)} \frac{1}{r_0} d\tau$$

вне области (D) является гармонической функцией во всякой области, лежащей вместе с границей внутри (D_e) .

Если мы покажем, что рассматриваемая вторая производная стремится к определенному конечному пределу $\psi(m_1)$, когда точка m_0 стремится, оставаясь в (D_e) , к точке m_1 границы, и что этот предел является правильно непрерывной функцией $\psi(m_1)$ на (S) , то теорема будет доказана. Действительно, в силу единственности решения задачи Дирихле рассматриваемая вторая производная ньютонова потенциала совпадает с решением задачи Дирихле для заданной на (S) правильно непрерывной функции. Как мы видели, такое решение является правильно непрерывной функцией в (D_e) .

Итак докажем, что $\psi(m_1)$ существует и является правильно непрерывной функцией на (S) .

Пусть m_1 некоторая точка поверхности (S) . Пусть точка m_0 в (D_e) лежит на нормали N_1 в точке m_1 на расстоянии δ от m_1 . Через μ_1 обозначим значение μ в точке m_1 . Тогда, используя (1), найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{(D)} \frac{\mu}{r_0} d\tau &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\mu_1 \int_{(D)} \frac{d\tau}{r_0} + \int_{(D)} (\mu - \mu_1) \frac{d\tau}{r_0} \right) = \\ &= -\mu_1 \frac{\partial}{\partial x} \int_{(S)} \frac{\cos(Nx)}{r_0} d\tau + \int_{(D)} (\mu - \mu_1) f(m_0, m) d\tau = \\ &= \mu_1 \beta(m_0) + \alpha(m_1, \delta). \end{aligned} \quad (7)$$

Как мы уже упоминали,

$$\beta(m_0) = - \frac{\partial}{\partial x} \int_{(S)} \frac{\cos(Nx)}{r_0} d\tau$$

есть правильно непрерывная функция в (D_i) и в (D_e) . Ее предельные [из (D_e)] значения на (S) образуют правильно непрерывную функцию, которую обозначим $\beta(m_1)$. Имеем, кроме того,

$$|\beta(m_0) - \beta(m_1)| < c\delta^{\lambda'},$$

и, таким образом, первое слагаемое (7) имеет пределом при $\delta \rightarrow 0$

$$\mu_1 \beta(m_1).$$

Докажем, что второе слагаемое $\alpha(m_1, \delta)$ стремится к

$$\varphi(m_1) = \int_{(D)} (\mu - \mu_1) f(m_1, m) d\tau, \quad (8)$$

когда точка m_0 , оставаясь на нормали N_1 , неограниченно приближается к точке m_1 . Заметим, что правильная непрерывность $\varphi(m_1)$ как функции m_1 на (S) уже была доказана в п. 1.

Пусть $(D, 2\delta)$ обозначает часть (D) внутри сферы радиуса 2δ с центром в m_1 . Тогда имеем:

$$\alpha(m_1, \delta) - \varphi(m_1) = \int_{(D)} (\mu - \mu_1) f(m_0, m) d\tau -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{(D)} (\mu - \mu_1) f(m_1, m) d\tau = \int_{(D, 2\delta)} (\mu - \mu_1) f(m_0, m) d\tau - \\
& - \int_{(D, 2\delta)} (\mu - \mu_1) f(m_1, m) d\tau + \\
& + \int_{(D - (D, 2\delta))} (\mu - \mu_1) |f(m_0, m) - f(m_1, m)| d\tau. \quad (9)
\end{aligned}$$

Как мы видели раньше, второй и третий интегралы правой части (9) по модулю меньше чисел вида $cA\delta^\lambda$.

Для оценки первого интеграла заметим, что

$$r_1 \leq r_0 + \delta,$$

и поэтому

$$|\mu - \mu_1| < Ar_1^\lambda \leq A(r_0 + \delta)^\lambda \leq 2^\lambda A(r_0^\lambda + \delta^\lambda).$$

Отсюда следует, что модуль первого интеграла правой части (9) не превосходит числа

$$\begin{aligned}
& 4 \cdot 2^\lambda A \int_{(D, 2\delta)} (r_0^\lambda + \delta^\lambda) \frac{d\tau}{r_0^3} = \\
& = 4 \cdot 2^\lambda A \left[\int_{(D, 2\delta)} r_0^{\lambda-3} d\tau + \delta^\lambda \int_{(D, 2\delta)} \frac{d\tau}{r_0^3} \right] < \\
& < 16\pi 2^\lambda A \int_0^{2\delta} r_0^{\lambda-1} dr_0 + 4 \cdot 2^\lambda A \delta^\lambda \int_{(D, 2\delta)} \frac{d\tau}{r_0^3} = \\
& = \delta^\lambda A \left[\frac{16\pi \cdot 6^\lambda}{\lambda} + 4 \cdot 2^\lambda \int_{(D, 2\delta)} \frac{d\tau}{r_0^3} \right] < cA\delta^\lambda,
\end{aligned}$$

так как сейчас будет доказано, что

$$\int_{(D, 2\delta)} \frac{d\tau}{r_0^3}$$

ограничен для всех δ , не превосходящих любого заданного числа, например d .

Действительно, пусть ξ, η, ζ местные координаты с началом в точке m_1 , причем ось $O\zeta$ направлена в сторону

точки m_0 . Очевидно, область $(D, 2\delta)$ лежит в области, ограниченной поверхностями

$$\zeta = -2\delta, \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = 2\delta, \quad \zeta = b\rho^{1+\lambda}.$$

Поэтому, так как $r_0 = \sqrt{\rho^2 + (\delta - \zeta)^2}$, имеем:

$$\begin{aligned} \int_{(D, 2\delta)} \frac{d\tau}{r_0^3} &< \int_0^{2\delta} \int_0^{2\delta} \int_{-2\delta}^{b\rho^{1+\lambda}} \frac{d\zeta}{(\sqrt{\rho^2 + (\delta - \zeta)^2})^3} d\rho d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^{2\delta} \frac{1}{\rho} \left[\frac{b\rho^{1+\lambda} - \delta}{\sqrt{\rho^2 + (b\rho^{1+\lambda} - \delta)^2}} + \frac{3\delta}{\sqrt{\rho^2 + 9\delta^2}} \right] d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^{2\delta} \frac{1}{\rho} \left[\frac{3\delta}{\sqrt{\rho^2 + 9\delta^2}} - 1 \right] d\rho + 2\pi \int_0^{2\delta} \frac{1}{\rho} \times \\ &\times \left[1 - \frac{\delta - b\rho^{1+\lambda}}{\sqrt{\rho^2 + (\delta - b\rho^{1+\lambda})^2}} \right] d\rho = -2\pi \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 9} [3 + \sqrt{x^2 + 9}]} + \\ &+ 2\pi \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + (1 - b\delta^\lambda x^{1+\lambda})^2} [\sqrt{x^2 + (1 - b\delta^\lambda x^{1+\lambda})^2} + (1 - b\delta^\lambda x^{1+\lambda})]} < \\ &< 2\pi \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + (1 - b\delta^\lambda x^{1+\lambda})^2} + (1 - b\delta^\lambda x^{1+\lambda})}, \end{aligned}$$

и последний интеграл является ограниченной и непрерывной функцией от δ в любой окрестности $\delta = 0$.

Таким образом,

$$|\alpha(m_1, \delta) - \varphi(m_1)| < cA\delta^\lambda. \quad (10)$$

Итак, если точка m_0 , оставаясь на нормали N_1 в точке m_1 , стремится к m_1 на (S) , то

$$\omega(m_0) = \left(\frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \right)_{m_0} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int \frac{\mu}{r_0} d\tau$$

стремится к пределу

$$\psi(m_1) = \mu_1 \beta(m_1) + \varphi(m_1), \quad (11)$$

причем

$$|\omega(m_0) - \psi(m_1)| < cA\delta\lambda'. \quad (12)$$

Кроме того, из правильной непрерывности μ_1 , $\beta(m_1)$ и $\varphi(m_1)$ на (S) следует, что

$$|\psi(m_1) - \psi(m')| < c_1A\delta_1\lambda', \quad (13)$$

если m' точка (S) , отстоящая на расстоянии δ_1 от m_1 .

Из (11) и (12) легко следует, что (12) имеет место для любой точки m_0 в (D_c) , отстоящей от m_1 на расстоянии, не превышающем δ . Действительно, тогда расстояние точки m_0 до ближайшей точки m' на (S) не превосходит δ и, следовательно, расстояние δ_1 от m_1 до m' не превосходит 2δ . Отсюда имеем, так как точка m_0 лежит на нормали N' в точке m' ,

$$\begin{aligned} |\omega(m_0) - \psi(m_1)| &\leq |\omega(m_0) - \psi(m')| + |\psi(m') - \psi(m_1)| < \\ &< cA\delta' + c_1A(2\delta)' = c_3A\delta', \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Таким образом, вторая производная $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ имеет определенные предельные значения $\psi(m_1)$ и последняя функция правильно непрерывна на (S) . Этим теорема доказана.

IV. ПРЯМЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ И НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ НА L_k

Сейчас докажем теоремы 3 и 4 § 21 гл. II.

Теорема 3. Если $(S) \in \mathcal{L}_{l+2}(B, \lambda)$, $\mu \in H(l, A, \lambda)$ на (S) , ($l \geq 0$), то $\bar{W}[\mu] \in H(l+1, cA, \lambda')$ на (S) .

Теорема 4. Если $(S) \in \mathcal{L}_{l+2}(B, \lambda)$, $\mu \in H(l, A, \lambda)$ на (S) , ($l \geq 0$), то $\frac{dV[\mu]}{dn} \in H(l+1, cA, \lambda')$ на (S) .

Мы сначала докажем теорему 3.

Пусть m_0 некоторая точка поверхности (S) , ξ, η, ζ — местные координаты с началом в m_0 . Будем считать радиус d_0 круга Λ_0 выбранным настолько малым, чтобы круг (Λ_1) радиуса $2d_0$ и концентрический с (Λ_0) также содержался в проекции на плоскость ξ, η части (Σ) поверхности (S) .

Мы будем считать, что $\mu(\xi, \eta) \in H(l, A, \lambda)$ и $F(\xi, \eta) \in H(l+2, B, \lambda)$ в (Λ_1) , и докажем, что $\bar{W}[\mu] \in H(l+1, cA, \lambda')$ в (Λ_0) .

Имеем:

$$\bar{W}[\mu] = \int_{(S-\Sigma)} \mu(2) \frac{\cos(r_{12}N_2)}{r_{12}^2} d\sigma_2 + \int_{(\Sigma)} \mu(2) \frac{\cos(r_{12}N_2)}{r_{12}^2} d\sigma_2. \quad (1)$$

Интеграл по $(S-\Sigma)$ является функцией ξ, η, ζ , имеющей непрерывные и ограниченные производные любого порядка по ξ, η, ζ в некоторой области, содержащей поверхность (Σ_0) . Заменяя ζ на $F(\xi, \eta)$, получаем значение первого интеграла на (Σ_0) . Так как $F(\xi, \eta)$ имеет производные по ξ и η до порядка $l+2$, то это же можно сказать о первом интеграле и, следовательно, первый интеграл принадлежит классу $H(l+1, c_1A, 1)$ в (Λ_0) и тем самым классу $H(l+1, cA, \lambda')$ в (Λ_0) .

Координаты точки m_1 обозначим ξ, η, ζ , а точки m_2 интегрирования — через (x, y, z) . Тогда имеем:

$$\begin{aligned} r_{12} &= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [F(x, y) - F(\xi, \eta)]^2}, \\ \cos(r_{12}N_2) &= \\ &= \frac{F(\xi, \eta) - F(x, y) + (x-\xi)F'_\xi(x, y) + (y-\eta)F'_\eta(x, y)}{r_{12}} \cos(N_2\zeta), \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} \cos(r_{12}\xi) &= \frac{\xi-x}{r_{12}}, \quad \cos(r_{12}\eta) = \frac{\eta-y}{r_{12}}, \\ \cos(r_{12}\zeta) &= \frac{F(\xi, \eta) - F(x, y)}{r_{12}}, \quad \cos(N_2\zeta) = \frac{1}{\sqrt{1 + F'^2_\xi + F'^2_\eta}}, \\ \cos(N_2\xi) &= -F'_\xi(x, y) \cos(N_2\zeta), \\ \cos(N_2\eta) &= -F'_\eta(x, y) \cos(N_2\zeta). \end{aligned}$$

Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} \int_{(\Sigma)} \mu(2) \frac{\cos(r_{12}N_2)}{r_{12}^2} d\sigma_2 &= \int_{(\Lambda)} \int_{(\Lambda)} \mu(x, y) \times \\ &\times \frac{F(\xi, \eta) - F(x, y) + (x-\xi)F'_\xi(x, y) + (y-\eta)F'_\eta(x, y)}{\{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [F(x, y) - F(\xi, \eta)]^2}\}^3} dx dy. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть $\omega(r)$ функция, имеющая непрерывные производные до порядка $l+3$ для всех $r \geq 0$, равная единице для $r \leq \frac{3}{2}d_0$ и равная нулю для $r \geq 2d_0$. Положим

$$\mu_1(x, y) = \mu(x, y) \omega(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

$$F_1(x, y) = F(x, y) \omega(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

причем будем считать $\mu_1(x, y)$ и $F_1(x, y)$ определенными на всей плоскости x, y и равными нулю вне (Λ_1) .

Очевидно, $\mu(x, y) = \mu_1(x, y)$ и $F(x, y) = F_1(x, y)$ в круге $\sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{3}{2}d_0$. Поэтому интеграл (2) отличается от аналогичного интеграла, полученного заменой $\mu(x, y)$ на $\mu_1(x, y)$ и $F(x, y)$ на $F_1(x, y)$, интегралом по части (Λ) вне указанного круга. Последний же интеграл также принадлежит $H(l+1, cA, \lambda')$ в круге (Λ_0) .

Функции $\mu_1(x, y)$ и $F_1(x, y)$, так же как и $\mu(x, y)$ и $F(x, y)$, имеют в (Λ_1) непрерывные производные до порядка l и $l+2$ соответственно и принадлежат там классам $H(l, cA, \lambda)$ и $H(l+2, cB, \lambda)$, так как этими же свойствами обладает $\omega(\sqrt{x^2 + y^2})$. Более того, функции $\mu_1(x, y)$ и $F_1(x, y)$ обладают указанными свойствами на всей плоскости (x, y) , а на границе круга (Λ_1) и вне его μ_1 и F_1 — их производные до порядка l и $l+2$ соответственно обращаются в нуль. Для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \eta) = & \int \int \mu_1(x, y) \times \\ & \times \frac{F_1(\xi, \eta) - F_1(x, y) + (x - \xi)F'_{1\xi}(x, y) + (y - \eta)F'_{1\eta}(x, y)}{\{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} + [r_1(x, y) - r_1(\xi, \eta)]^2\}^3} dx dy \end{aligned}$$

принадлежит классу $H(l+1, cA, \lambda')$ в (Λ_0) .

В дальнейшем вместо $\mu_1(x, y)$ и $F_1(x, y)$ будем писать $\mu(x, y)$ и $F(x, y)$, а областью интегрирования считать всю плоскость x, y .

Перейдем к полярным координатам с полюсом в точке $m_1(\xi, \eta)$, положив

$$x = \xi + \rho \cos \theta, \quad y = \eta + \rho \sin \theta.$$

Тогда получим:

$$\varphi(\xi, \eta) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \mu(\xi + \rho \cos \theta, \eta + \rho \sin \theta) K(\xi, \eta; \rho, \theta) d\rho d\theta, \quad (3)$$

где

$$K(\xi, \eta; \rho, \theta) = \left. \begin{aligned} &= \rho \frac{F(m_2) - F(m_1) + \rho \cos \theta \cdot F'_\xi(m_2) + \rho \sin \theta \cdot F'_\eta(m_2)}{\{\sqrt{\rho^2 + [F(m_2) - F(m_1)]^2}\}^3}, \\ &m_2(\xi, \eta), m_1(\xi + \rho \cos \theta, \eta + \rho \sin \theta). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Изучим ближе функцию $K(\xi, \eta; \rho, \theta)$. Имеем:

$$\begin{aligned} F(m_2) - F(m_1) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} F(\xi + t\rho \cos \theta, \eta + t\rho \sin \theta) dt = \\ &= \int_0^1 [F'_\xi(m) \rho \cos \theta + F'_\eta(m) \rho \sin \theta] dt = \\ &= \rho \int_0^1 [F'_\xi(m) \cos \theta + F'_\eta(m) \sin \theta] dt, \end{aligned}$$

где m означает точку с координатами $\xi + t\rho \cos \theta, \eta + t\rho \sin \theta$.

Поэтому функция

$$\begin{aligned} \Psi_1(\xi, \eta; \rho, \theta) &= \frac{F(m_2) - F(m_1)}{\rho} = \\ &= \int_0^1 [F'_\xi(m) \cos \theta + F'_\eta(m) \sin \theta] dt \end{aligned}$$

имеет по всем аргументам $\xi, \eta; \rho, \theta$ непрерывные производные до $l+1$ порядка.

Далее, интегрируя по частям, получим:

$$F(m_2) - F(m_1) = \int_0^1 \frac{d}{dt} F(m) dt = t \frac{d}{dt} F(m) \Big|_0^1 -$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^1 t \frac{d^2}{dt^2} F(m) dt = F'_\xi(m_2) \rho \cos \theta + F'_{\eta}(m_2) \rho \sin \theta - \\
 & - \rho^2 \int_0^1 t [F''_{\xi\xi}(m) \cos^2 \theta + 2F''_{\xi\eta}(m) \cos \theta \sin \theta + F''_{\eta\eta}(m) \sin^2 \theta] dt,
 \end{aligned}$$

откуда следует, что функция

$$\begin{aligned}
 \Psi_2(\xi, \eta; \rho, \theta) &= \frac{F(m_1) - F(m_2) + \rho \cos \theta F'_\xi(m_2) + \rho \sin \theta F'_{\eta}(m_2)}{\rho^2} = \\
 &= \int_0^1 t [F''_{\xi\xi}(m) \cos^2 \theta + 2F''_{\xi\eta}(m) \cos \theta \sin \theta + \\
 &\quad + F''_{\eta\eta}(m) \sin^2 \theta] dt
 \end{aligned}$$

имеет по всем аргументам $\xi, \eta; \rho, \theta$ непрерывные производные до порядка l .

Так как

$$K(\xi, \eta; \rho, \theta) = \rho \frac{\rho^2 \Psi_2(\xi, \eta; \rho, \theta)}{\rho^3 [V 1 + \Psi_1^2(\xi, \eta; \rho, \theta)]^3} = \frac{\Psi_2(\xi, \eta; \rho, \theta)}{[V 1 + \Psi_1^2(\xi, \eta; \rho, \theta)]^3},$$

то функция $K(\xi, \eta; \rho, \theta)$ имеет непрерывные производные до порядка l по $\xi, \eta; \rho, \theta$. Этим же свойством обладает функция $\mu(\xi + \rho \cos \theta, \eta + \rho \sin \theta)$. Поэтому производная порядка l от $\varphi(\xi, \eta)$ по ξ и η представится конечной суммой интегралов типа

$$\left. \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (\mu^{(m)}(\xi + \rho \cos \theta, \eta + \rho \sin \theta) K^{(l-m)}(\xi, \eta; \rho, \theta) d\rho d\theta, \right\} \quad (5)$$

$$m = 0, 1, \dots, l,$$

где $\mu^{(m)}$ означает какую-либо производную порядка m от $\mu(\xi, \eta)$ и $K^{(l-m)}$ означает какую-либо производную порядка $l-m$ по ξ, η от $K(\xi, \eta; \rho, \theta)$. Отсюда следует непрерывность и ограниченность числами вида cA всех производных до порядка l от функции $\varphi(\xi, \eta)$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что интеграл типа (5) имеет правильно непрерывную производную первого порядка в (Λ_0) .

Пользуясь формулой (4), изучим подробнее $K^{(l-m)}(\xi, \eta; \rho, \theta)$.

Пусть $\Phi(\xi, \eta)$ какая-либо функция. Выражение

$$\Phi(\xi, \eta) - \Phi(x, y) + (x - \xi) \Phi'_\xi(x, y) + (y - \eta) \Phi'_\eta(x, y)$$

будем обозначать через $\{\Phi\}$. Заменяя x и y на $\xi + \rho \cos \theta$ и $\eta + \rho \sin \theta$, получим функцию от $\xi, \eta; \rho, \theta$, которую обозначим $\{\tilde{\Phi}\}$. Таким образом, числитель дроби (4) есть $\{\tilde{F}\}$.

Очевидно, производная от $\{\tilde{F}\}$ по ξ и η получается заменой F на соответствующую производную, т. е.

$$\frac{\partial^q \{\tilde{F}\}}{\partial \xi^{q_1} \partial \eta^{q_2}} = \left\{ \frac{\partial^q F}{\partial \xi^{q_1} \partial \eta^{q_2}} \right\} = \{\tilde{F}^{(q)}\}.$$

Разность $\Phi(x, y) - \Phi(\xi, \eta)$ будем обозначать $\{\Phi\}$, а функцию, полученную заменой x и y на $\xi + \rho \cos \theta$ и $\eta + \rho \sin \theta$, через $\{\tilde{\Phi}\}$. Очевидно, что

$$\frac{\partial^v \{\tilde{F}\}}{\partial \xi^{v_1} \partial \eta^{v_2}} = \left[\frac{\partial^v F}{\partial \xi^{v_1} \partial \eta^{v_2}} \right] = \{\tilde{F}^{(v)}\}.$$

Докажем, что производная порядка k ($k \geq 1$) по ξ и η функции $(\rho^2 + |\tilde{F}|^2)^{-\frac{3}{2}}$ является суммой конечного числа слагаемых вида

$$(\rho^2 + |\tilde{F}|^2)^{-\frac{3}{2} + p} \prod_{i=1}^{2p} \{\tilde{F}^{(v_i)}\}, \quad \left(\begin{array}{l} 1 \leq p \leq k \\ 0 \leq v_i \leq k - p + 1 \end{array} \right). \quad (6)$$

Действительно, первая производная равна

$$-3(\rho^2 + |\tilde{F}|^2)^{-\left(\frac{3}{2} + 1\right)} [\tilde{F}] [\tilde{F}^{(1)}],$$

что доказывает утверждение для $k = 1$. Пусть $k_1 > 1$. Предполагая, что наше утверждение верно для $k = k_1 - 1$, покажем, что оно верно и для k_1 . При дифференцировании каждого слагаемого (6) будем иметь: при дифференцировании первого множителя число p увеличится на единицу и добавится множитель $[\tilde{F}] [\tilde{F}^{(1)}]$; при дифференцировании $\prod_{i=1}^{2p} \{\tilde{F}^{(v_i)}\}$ получим сумму $2p$ слагаемых того же типа, и в каждом слагаемом одно из v_i на единицу больше исходного.

Таким образом, производная порядка $k_1 = k + 1$ будет суммой слагаемых либо типа

$$\{\rho^2 + [\tilde{F}]^2\}^{-\left(\frac{3}{2} + p + 1\right)} \prod_{i=1}^{2(p+1)} [\widetilde{F^{(v_i)}}], \quad \left(\begin{array}{l} 2 \leq p + 1 \leq k_1 \\ 0 \leq v_i \leq k - p + 1 \end{array} \right),$$

либо типа

$$\{\rho^2 + [\tilde{F}]^2\}^{-\left(\frac{3}{2} + p\right)} \prod_{i=1}^{2p} [\widetilde{F^{(v_i)}}], \quad \left(\begin{array}{l} 1 \leq p \leq k < k_1 \\ 0 \leq v_i \leq k_1 - p + 1 \end{array} \right),$$

что доказывает справедливость нашего предположения для k_1 , если оно верно для $k = k_1 - 1$. Так как для $k = 1$ утверждение верно, то оно верно для всех k , для которых существует производная от F , т. е. в нашем случае для $k \leq l + 2$.

Из всего изложенного следует, что $K^{(l-m)}(\xi, \eta; \rho, \theta)$ является суммой конечного числа слагаемых вида

$$\rho \cdot \frac{\prod_{i=1}^{2p} [\widetilde{F^{(v_i)}}]}{(\rho^2 + [\tilde{F}]^2)^{\frac{3}{2} + p}}, \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq q \leq l - m \leq l \\ 0 \leq p \leq l - m \leq l \\ 0 \leq v_i \leq l - m \leq l \end{array} \right), \quad (7)$$

если считать для $p = 0$ произведение $\prod_{i=1}^{2p} [\widetilde{F^{(v_i)}}]$ равным единице.

Слагаемое (7) обозначаем через $\tilde{R}(\xi, \eta; \rho, \theta)$. Если в (7) заменить $\{\widetilde{F^{(q)}}\}$, $\{\widetilde{F^{(v_i)}}\}$, $[\tilde{F}]$, ρ на $\{F^{(q)}\}$, $\{F^{(v_i)}\}$, $[F]$, $\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$, то полученную функцию будем обозначать $R(\xi, \eta; x, y)$.

Покажем, что R ограничена. Действительно, так как $q \leq l$, то $\Phi = F^{(q)} \in H(2, B, \lambda)$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} | \{F^{(q)}\} | &= | \{\Phi\} | = | \Phi(\xi, \eta) - \Phi(x, y) + (x - \xi)\Phi'_\xi(x, y) + \\ &+ (y - \eta)\Phi'_\eta(x, y) | = | (x - \xi)(\Phi'_\xi(x, y) - \Phi'_\xi(\xi', \eta')) + \\ &+ (y - \eta)(\Phi'_\eta(x, y) - \Phi'_\eta(\xi', \eta')) | < 4B\rho\rho' < 4B\rho^2, \end{aligned}$$

где (ξ', η') — некоторая точка между (x, y) и (ξ, η) , ρ' — ее расстояние до (x, y) .

Аналогично, так как $v_i \leq l$, то $F^{(v_i)} \in H(2, B, \lambda)$; следовательно,

$$|F^{(v_i)}| = |F^{(v_i)}(x, y) - F^{(v_i)}(\xi, \eta)| < 2B\rho.$$

Поэтому, учитывая, что $\rho^2 + [F]^2 \geq \rho^2$, получим:

$$|R| \leq \frac{\rho \cdot 2B\rho^2 (2B\rho)^{2p}}{\rho^{2p+3}} = (2B)^{2p+1} \leq (2B+1)^{2l+1} = c_1.$$

Отсюда следует, что интеграл (5) является конечной суммой слагаемых вида

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \mu^{(m)}(\xi + \rho \cos \theta, \eta + \rho \sin \theta) \tilde{R} \, d\rho \, d\theta = \\ = \int \int \mu^{(m)}(x, y) \frac{R}{\rho} \, dx \, dy. \quad (8) \end{aligned}$$

Так как $m \leq l$ и $\mu \in H(l, A, \lambda)$, то $\mu^{(m)} \in H(l-m, A, \lambda)$, и тем самым $\mu^{(m)} \in H(0, A, \lambda)$ для всех $m \leq l$. Кроме того, мы имеем, что $F^{(q)}$ и $F^{(v_i)} \in H(2, B, \lambda)$; будем теперь считать и $F \in H(2, B, \lambda)$.

Теорема будет доказана, если покажем, что интеграл (8) принадлежит в (Λ_0) классу $H(1, cA, \lambda)$, когда $\mu^{(m)}$, $F^{(q)}$, $F^{(v_i)}$ и F принадлежат на всей плоскости упомянутым классам, и обращается в нуль вне круга Λ_1 .

Предварительно изучим функцию R . Докажем следующие неравенства:

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{R}{\rho} \right| < \frac{c_2}{\rho^2}, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{R}{\rho} \right| < \frac{c_2}{\rho^2}; \quad (9)$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{R}{\rho} \right| < \frac{c_3}{\rho^3}, \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \frac{R}{\rho} \right| < \frac{c_3}{\rho^3}, \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \frac{R}{\rho} \right| < \frac{c_3}{\rho^3}. \quad (10)$$

Для сокращения записи будем обозначать $F^{(q)}$ через Φ , $F^{(v_i)}$ через F_i , $\prod_{i=1}^n [F^{(v_i)}]$ через ψ_n , $\sqrt{\rho^2 + [F]^2}$ через r и $\psi_n r^{-(2p+3)}$ через Ω_p . Тогда на основании (7) имеем:

$$\frac{R}{\rho} = \{\Phi\} \Omega_p$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{R}{\rho} = \Omega_p \frac{\partial \{\Phi\}}{\partial \xi} + \{\Phi\} \frac{\partial \Omega_p}{\partial \xi}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{R}{\rho} = \Omega_p \frac{\partial^2 \{\Phi\}}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial \Omega_p}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \{\Phi\}}{\partial \xi} + \{\Phi\} \frac{\partial^2 \Omega_p}{\partial \xi^2}. \quad (12')$$

Мы уже видели, что

$$|\Omega_p| < \frac{(2B)^{2p}}{\rho^3}, \quad |\{\Phi\}| < 4B\rho^2. \quad (13)$$

Далее имеем:

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi} \{\Phi\} \right| = |\Phi'_\xi(\xi, \eta) - \Phi'_\xi(x, y)| < 2B\rho, \quad (14)$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \{\Phi\} \right| = |\Phi''_{\xi\xi}| < B. \quad (14')$$

Дифференцируя Ω_p , получим:

$$\frac{\partial \Omega_p}{\partial \xi} = -(2p+3) \frac{(\xi-x) - [F] F'_\xi(\xi, \eta)}{r^{2p+5}} \psi_{2p} + \frac{1}{r^{2p+3}} \sum_{k=1}^{2p} F'_{k\xi} \psi_{2p-1,k},$$

откуда заключаем:

$$\left| \frac{\partial \Omega_p}{\partial \xi} \right| < \frac{B_1}{\rho^4}, \quad (15)$$

и аналогично, дифференцируя еще раз, получим:

$$\left| \frac{\partial^2 \Omega_p}{\partial \xi^2} \right| < \frac{B_2}{\rho^5}, \quad (15')$$

где B_1 и B_2 зависят только от B и l . Неравенства (9) и (10) легко следуют из (12) и (12') и последних неравенств (13)—(15).

Функцию типа (7) обозначим $\tilde{R}_1(\xi, \eta; \rho, \theta)$ и соответственно $R_1(\xi, \eta; x, y)$, если $F^{(q)} \in H(1, B, \lambda)$ и $F^{(q_i)} \in H(1, B, \lambda)$.

Рассмотрим теперь функцию $\tilde{R}(\xi, \eta; \rho, \theta)$, определяемую равенством (7). Очевидно, ее производная по ξ является конечной суммой слагаемых того же типа (7), причем в одном из слагаемых $F^{(q)}$ заменено на $F^{(q+1)}$, в другом ρ увеличилось на единицу, а в каждом из остальных одно из ν_i увеличилось

на единицу. Отсюда следует, что $\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \xi}$ есть конечная сумма слагаемых типа \tilde{R}_1 .

Докажем, что

$$|R_1| < c_6 \rho^{\lambda-1}. \quad (16)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{R_1}{\rho} \right| < c_6 \rho^{\lambda-3}, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{R_1}{\rho} \right| < c_6 \rho^{\lambda-3}. \quad (16')$$

Из неравенства (16) следует, что на основании сказанного выше

$$\left| \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \xi} \right| < c_7 \rho^{\lambda-1}. \quad (16'')$$

Действительно, так как $\Phi \in H(1, B, \lambda)$, то вместо (14) будем иметь:

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi} \{\Phi\} \right| = |\Phi'_\xi(\xi, \eta) - \Phi'_\xi(x, y)| < B \rho' \quad (14'')$$

и вместо второго из неравенств (13):

$$\begin{aligned} |\{\Phi\}| &= |\Phi(\xi, \eta) - \Phi(x, y) + (x - \xi) \Phi'_\xi(x, y) + (y - \eta) \times \\ &\times \Phi'_\eta(x, y)| = |(x - \xi)(\Phi'_\xi(x, y) - \Phi'_\xi(\xi', \eta')) + \\ &+ (y - \eta)(\Phi'_\eta(x, y) - \Phi'_\eta(\xi', \eta'))| < 2B \rho^{1+\lambda}. \end{aligned} \quad (13')$$

Тогда на основании (12), (13), (13'), (14'') и (15) приходим к неравенству (16'). Неравенство (16) следует из (13'), первого неравенства (13) и того, что $R_1 = \rho \{\Phi\} \Omega_p$.

Рассмотрим интеграл

$$\varphi(\xi, \eta) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \tilde{R}(\xi, \eta; \rho, \theta) d\rho d\theta = \int \int \frac{1}{\rho} R(\xi, \eta; x, y) dx dy. \quad (17)$$

Покажем, что $\varphi(\xi, \eta) \in H(1, c, \lambda')$, где c зависит только от B и выбора λ' .

Действительно,

$$\varphi(\xi, \eta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \tilde{R} d\rho d\theta,$$

причем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \xi} d\rho d\theta.$$

В силу (16'') имеем, если $0 < \delta_1 < \delta_2$,

$$\left| \frac{\partial \varphi_{\delta_1}}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_{\delta_2}}{\partial \xi} \right| = \left| \int_0^{2\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \xi} d\rho d\theta \right| < 2\pi c_7 \int_{\delta_1}^{\delta_2} \rho^{\lambda-1} d\rho = \\ = \frac{2\pi c_7}{\lambda} (\delta_2^\lambda - \delta_1^\lambda) < 2\pi c_7 \delta_2^\lambda,$$

откуда следует, что $\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial \xi}$ при $\delta \rightarrow 0$ равномерно стремится к пределу

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \xi} d\rho d\theta, \quad (18)$$

который и является производной интеграла (17) от ξ . Таким образом, (18) есть $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$.

Покажем, что интеграл (18) принадлежит $H(0, c, \lambda')$. Действительно, так как $\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \xi}$ есть конечная сумма функций \tilde{R}_1 , то достаточно показать, что интеграл

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \tilde{R}_1 d\rho d\theta = \int \int \frac{R_1}{\rho} dx dy \quad (19)$$

принадлежит классу $H(0, c, \lambda')$.

Пусть $m_0(\xi, \eta)$ и $m_1(\xi_1, \eta_1)$ две точки, расстояние между которыми обозначим δ . Через ρ_1 обозначим расстояние от m_1 до точки $m_2(x, y)$. Тогда

$$\int \int \frac{R_1(1, 2)}{\rho_1} dx dy - \int \int \frac{R_1(0, 2)}{\rho} dx dy = \int \int_{\rho \leq 2\delta} \frac{R_1(1, 2)}{\rho_1} dx dy - \\ - \int \int_{\rho \leq 2\delta} \frac{R(0, 2)}{\rho} dx dy + \int \int_{\rho \geq 2\delta} \left[\frac{R_1(0, 2)}{\rho_1} - \frac{R(0, 2)}{\rho} \right] dx dy. \quad (20)$$

В силу неравенств (16) имеем:

$$\int \int_{\rho \leq 2\delta} \frac{R_1(0, 2)}{\rho} dx dy \leq 2\pi c_5 \int_0^{2\delta} \rho^{\lambda-1} d\rho = 2\pi c_5 \frac{(2\delta)^\lambda}{\lambda}$$

и аналогично, так как круг $\rho \leq 2\delta$ лежит в круге $\rho_1 \leq 3\delta$, получаем оценку $2\pi c_6 \frac{(3\delta)^\lambda}{\lambda}$ для первого интеграла правой части (20); поэтому сумма первых двух интегралов правой части (20) не больше числа вида $c\delta^\lambda$. Остаётся оценить последний интеграл правой части (20).

В области $\rho \geq 2\delta$, в силу неравенства (9) § 2, имеем:

$$\frac{1}{2}\rho \leq \rho' < \frac{3}{2}\rho,$$

где ρ' расстояние точки m_2 до любой из точек m' отрезка m_0m_1 .

В силу неравенства (16') имеем:

$$\begin{aligned} \left| \frac{R_1(1,2)}{\rho_1} - \frac{R_1(0,2)}{\rho} \right| &= \left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{R_1}{\rho} \right)_{m'} (\xi_1 - \xi) + \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{R_1}{\rho} \right)_{m'} (\eta_1 - \eta) \right| \leq \\ &\leq \delta - \frac{2c_6}{\rho^{3-\lambda}} < \delta \frac{2c_6 \cdot 2^{3-\lambda}}{\rho^{3-\lambda}} = \frac{c\delta}{\rho^{3-\lambda}}. \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая, что R_1 обращается в нуль для достаточно больших ρ , найдем:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\rho \geq 2\delta} \int \left[\frac{R_1(1,2)}{\rho_1} - \frac{R_1(0,2)}{\rho} \right] dx dy \right| &\leq 2\pi c\delta \int_{2\delta}^a \frac{\rho d\rho}{\rho^{3-\lambda}} = \\ &= 2\pi c\delta \left[\frac{(2\delta)^{\lambda-1}}{1-\lambda} - \frac{a^{\lambda-1}}{1-\lambda} \right] < c'\delta^\lambda, \end{aligned}$$

если $\lambda < 1$. Если $\lambda = 1$, получим оценку $2\pi c\delta \ln \frac{a}{2\delta} < c''\delta^{\lambda'}$, где $\lambda' < 1$. Таким образом, левая часть (20) меньше числа вида $c\delta^{\lambda'}$ и, следовательно, интеграл (19) из класса $H(0, c, \lambda')$, а поэтому $\varphi(\xi, \eta) \in H(1, c, \lambda')$.

Перейдем теперь к доказательству того, что интеграл (8) из класса $H(1, cA, \lambda')$.

Вместо $\mu^{(m)}$ будем писать просто μ , считая $\mu \in H(0, A, \lambda)$. Значение μ в точке m_0 будем обозначать μ_0 . Пусть h некоторое число, отличное от нуля, и m_1 точка с координатами $(\xi + h, \eta)$. Расстояние точки m_1 до $m_2(x, y)$ обозначим через ρ_1 .

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left[\int \int \mu \frac{R(1, 2)}{\rho_1} dx dy - \int \int \mu \frac{R(0, 2)}{\rho} dx dy \right] = \\ & = \mu_0 \cdot \frac{1}{h} \left[\int \int \frac{R(1, 2)}{\rho_1} dx dy - \int \int \frac{R(0, 2)}{\rho} dx dy \right] + \\ & + \frac{1}{h} \left[\int \int (\mu - \mu_0) \frac{R(1, 2)}{\rho_1} dx dy - \int \int (\mu - \mu_0) \frac{R(0, 2)}{\rho} dx dy \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Если при $h \rightarrow 0$ (21) имеет предел, то последний будет производной по ξ от интеграла (8). Теорема будет доказана, если докажем существование предела и его принадлежность $H(0, cA, \lambda')$.

Первая квадратная скобка в правой части (21) есть

$$\varphi(\xi + \eta, h) - \varphi(\xi, \eta)$$

и, следовательно, отношение этой разности к h имеет пределом $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$. Так как $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \in H(0, c, \lambda')$ и $\mu_0 = \mu(\xi, \eta) \in H(0, A, \lambda)$, то предел первого слагаемого правой части (21) существует и принадлежит $H(0, cA, \lambda')$. Остается то же доказать для второго слагаемого правой части (21).

Для этого докажем сначала, что при $h \rightarrow 0$ стремится к нулю следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \int \int (\mu - \mu_0) \left\{ \frac{1}{h} \left[\frac{R(1, 2)}{\rho_1} - \frac{R(0, 2)}{\rho} \right] - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{R(0, 2)}{\rho} \right\} dx dy = \\ & = \frac{1}{h} \int \int_{\rho \leq 2|h|} (\mu - \mu_0) \frac{R(1, 2)}{\rho_1} dx dy - \frac{1}{h} \int \int_{\rho \leq 2|h|} (\mu - \mu_0) \times \\ & \times \frac{R(0, 2)}{\rho} dx dy - \int \int_{\rho \leq 2|h|} (\mu - \mu_0) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{R(0, 2)}{\rho} dx dy + \\ & + \int \int_{\rho \geq 2|h|} (\mu - \mu_0) \left\{ \frac{1}{h} \left[\frac{R(1, 2)}{\rho_1} - \frac{R(0, 2)}{\rho} \right] - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{R(0, 2)}{\rho} \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (22)$$

Интегралы по кругу $\rho \leq 2|h|$ оцениваются так. В силу неравенства (9),

$$\begin{aligned} \left| \int_{\rho \leq 2|h|} \int (\mu - \mu_0) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{R(0, 2)}{\rho} dx dy \right| &\leq \\ &\leq 2\pi A c_2 \int_0^{2|h|} \rho^\lambda \frac{\rho}{\rho^2} d\rho = \frac{2\pi c_2 \cdot 2^\lambda}{\lambda} A |h|^\lambda, \\ \left| \frac{1}{h} \int_{\rho \leq 2|h|} \int (\mu - \mu_0) \frac{R(0, 2)}{\rho} dx dy \right| &\leq \\ &\leq 2\pi A c_1 \cdot \frac{1}{|h|} \int_0^{2|h|} \rho^\lambda \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \rho d\rho = \frac{2\pi c_1 \cdot 2^\lambda}{1+\lambda} A |h|^\lambda. \quad (23) \end{aligned}$$

Учитывая, что круг $\rho_1 \leq 3|h|$ содержит круг $\rho \leq 2|h|$, а также, что

$$|\mu - \mu_0| \leq |\mu - \mu_1| + |\mu_1 - \mu_0| < A\rho_1^\lambda + A|h|^\lambda,$$

получим:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_{\rho \leq 2|h|} \int (\mu - \mu_0) \frac{R(1, 2)}{\rho_1} dx dy \right| &\leq \frac{2\pi A c_1}{|h|} \left[\int_0^{3|h|} \rho_1^\lambda \frac{1}{\rho_1} \cdot \rho_1 d\rho_1 + \right. \\ &\quad \left. + |h|^\lambda \cdot \int_0^{3|h|} \frac{1}{\rho_1} \cdot \rho_1 d\rho_1 \right] = 2\pi c_1 \left(\frac{3^{\lambda+1}}{\lambda+1} + 3 \right) A |h|^\lambda, \end{aligned}$$

и, таким образом, интеграл по кругу $\rho \leq 2|h|$ стремится к нулю при $h \rightarrow 0$. Остается показать, что это же верно и для интеграла по области $\rho \geq 2|h|$.

Так как

$$\frac{1}{h} \left[\frac{R(1, 2)}{\rho_1} - \frac{R(0, 2)}{\rho} \right]$$

равно значению производной по ξ от $\frac{R}{\rho}$ в некоторой точке $m'(\xi + \eta h, \eta)$, то фигурная скобка в интеграле (22) есть разность значений $\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{R}{\rho}$ в точках m' и m_0 и, в силу неравен-

ства (10), имеет оценку

$$\frac{c_3 |h|}{\rho'^3}.$$

Так как для области $\rho \geq 2|h|$, в силу неравенства 9 § 2, имеем $\rho' \geq \frac{\rho}{2}$, то

$$\left| \frac{1}{h} \left[\frac{R(1, 2)}{\rho_1} - \frac{R(0, 2)}{\rho} \right] - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{R(0, 2)}{\rho} \right| \leq \frac{8c_3 |h|}{\rho^3}. \quad (24)$$

Отсюда легко получаем, что часть интеграла (22) по области $\rho \geq 2|h|$ меньше, чем

$$\begin{aligned} 2\pi A \cdot 8c_3 |h| \cdot \int_{2|h|}^a \rho' \cdot \frac{1}{\rho^3} \cdot \rho d\rho = \\ = \frac{16\pi c_3 \cdot 2^{2-1}}{1-\lambda} A |h| [|h|^{-1} - a^{-1}] < cA |h|^{-1}, \end{aligned}$$

и, следовательно, интеграл (22) стремится к нулю при $h \rightarrow 0$.
Из доказанного следует, что

$$\iint (\mu - \mu_0) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{R}{\rho} dx dy \quad (25)$$

является пределом второго слагаемого правой части (21).

Остается показать, что интеграл (25) из класса $H(0, cA, \lambda')$.

Пусть $m_1(\xi_1, \eta_1)$ некоторая точка на расстоянии δ от $m_0(\xi, \eta)$; обозначим $\mu_1 = \mu_1(\xi_1, \eta_1)$ и ρ_1 расстояние m_1 до $m_2(x, y)$.

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \iint (\mu - \mu_1) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{R}{\rho} \right)_{m_1} dx dy - \iint (\mu - \mu_0) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{R}{\rho} \right)_{m_0} dx dy = \\ = \iint_{\rho \leq 2\delta} (\mu - \mu_1) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{R}{\rho} \right)_{m_1} dx dy - \iint_{\rho \leq 2\delta} (\mu - \mu_0) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{R}{\rho} \right) dx dy + \\ + \iint_{\rho \geq 2\delta} \left[(\mu - \mu_1) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{R}{\rho} \right)_{m_1} - (\mu - \mu_0) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{R}{\rho} \right)_{m_0} \right] dx dy. \quad (26) \end{aligned}$$

Второй и первый интегралы правой части (26) меньше чисел

$$\frac{2\pi A c_1}{1+\lambda} (2\delta)^\lambda \quad \text{и} \quad \frac{2\pi A c_1}{1+\lambda} (3\delta)^\lambda,$$

что получается, так же как и (23), если заметить, что круг $\rho \leq 2\delta$ содержится в круге $\rho_1 \leq 3\delta$. Для оценки грегьева интеграла правой части (26), заметим, что

$$\begin{aligned} & \left| (\mu - \mu_1) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{R}{\rho} \right)_{m_1} - (\mu - \mu_0) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{R}{\rho} \right)_{m_1} \right| \leq \\ & \leq |\mu - \mu_0| \cdot \left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{R}{\rho} \right)_{m_1} - \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{R}{\rho} \right)_{m_1} \right| + |\mu_1 - \mu_0| \cdot \left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{R}{\rho} \right)_{m_1} \right| \leq \\ & \leq A \rho^\lambda \cdot \left| \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \cdot \frac{R}{\rho} \right)_{m'} (\xi_1 - \xi_0) + \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{R}{\rho} \right)_{m'} (\eta_1 - \eta_0) \right| + \\ & \quad + A \delta^\lambda \cdot \frac{c_2}{\rho_1^2} \leq A \rho^\lambda \cdot \frac{2\delta c_3}{\rho'^2} + \frac{A c_2 \delta^\lambda}{\rho_1^2}, \end{aligned}$$

где m' — некоторая точка отрезка $m_0 m_1$. В силу неравенства (9) § 2 для области $\rho \geq 2\delta$ имеем $\rho_1 > \frac{\rho}{2}$, $\rho' > \frac{\rho}{2}$, и поэтому изучаемая разность не превосходит

$$A (c'_1 \delta \rho^{\lambda-3} + c'_2 \delta \rho^{\lambda-2}).$$

Таким образом, третий интеграл правой части (26) не превосходит числа

$$\begin{aligned} & A \cdot 2\pi \left(c'_1 \delta \int_{2\delta}^a \rho'^{-3} \rho \, d\rho + c'_2 \delta^\lambda \int_{2\delta}^a \rho^{-2} \rho \, d\rho \right) < \\ & < 2\pi A \left(c'_1 \frac{2^\lambda \delta^\lambda}{1-\lambda} + c'_2 \delta^\lambda \ln \frac{a}{2\delta} \right), \end{aligned}$$

которое меньше числа вида

$$c'' A \delta^{\lambda'}, \quad (0 < \lambda' < \lambda),$$

и выбор c'' зависит от выбора λ' . Этим теорема 3 полностью доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 4. Пусть m_0 некоторая точка поверхности (S) . Примем ее за начало местной системы координат ξ, η, ζ . Пусть $m_1(\xi, \eta, \zeta)$ некоторая точка (S) и $m_2(x, y, z)$ точка интегрирования.

Имеем:

$$\frac{dV[\mu]}{dn} = \int_{(S-\Sigma)} \mu(2) \frac{\cos(r_{21}N_1)}{r_{21}^2} d\sigma + \int_{(\Sigma)} \mu(2) \frac{\cos(r_{21}N_1)}{r_{21}^2} d\sigma. \quad (27)$$

Первый интеграл правой части (27) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \cos(N_1\xi) \int_{(S-\Sigma)} \mu(2) \frac{\cos(r_{21}\xi)}{r_{21}^2} d\sigma_2 + \cos(N_1\eta) \int_{(S-\Sigma)} \mu(2) \frac{\cos(r_{21}\eta)}{r_{21}^2} d\sigma + \\ + \cos(N_1\zeta) \int_{(S-\Sigma)} \mu(2) \frac{\cos(r_{21}\zeta)}{r_{21}^2} d\sigma, \end{aligned}$$

где интегралы являются функциями ξ, η, ζ , имеющими непрерывные и ограниченные производные любого порядка по ξ, η, ζ в некоторой области, содержащей поверхность (Σ_0) . Заменяя в этих функциях ζ на $F(\xi, \eta)$, получаем значения этих интегралов на (Σ_0) как функций (ξ, η) в (Δ_0) . Так как $F(\xi, \eta)$ имеет непрерывные производные до порядка $l+2$, то это же можно сказать и о значениях этих интегралов на (Σ_0) , которые, таким образом, принадлежат $H(l+1, cA, 1)$ и тем самым $H(l+1, cA, \lambda')$ в (Δ_0) . Так как $\cos(N_1\xi), \cos(N_1\eta), \cos(N_1\zeta)$ также принадлежат этому же классу, то первый интеграл правой части (27) принадлежит $H(l+1, cA, \lambda')$.

Преобразуя второй интеграл правой части (27) так же, как был преобразован второй интеграл правой части (1), получим:

$$\begin{aligned} \int_{(\Sigma)} \mu(2) \frac{\cos(r_{21}N_1)}{r_{21}^2} d\sigma_2 = \\ = \cos(N_1\zeta) \int_{(\Delta)} \int \mu(x, y) \sqrt{(1+F'_\xi(m_2))^2 + F'^2_\eta(m_2)} \times \\ \times \frac{F(m_2) - F(m_1) + (\xi - x)F'_\xi(m_1) + (\eta - y)F'_\eta(m_1)}{\{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} + |F|^2\}^{\frac{3}{2}}} dx dy. \quad (28) \end{aligned}$$

Так как $\cos(N_1\zeta) \in H(l+1, c, \lambda)$ в (Δ_0) , то второй интеграл правой части (27) будет принадлежать $H(l+1, cA, \lambda')$, если будет доказано, что интеграл в правой части (28) принадлежит $H(l+1, cA, \lambda')$.

Так как вместе с $\mu(x, y)$ также $\mu_1(x, y) = \mu(x, y) \times \sqrt{1 + F_{\xi}^{\prime 2}(m_2) + F_{\eta}^{\prime 2}(m_2)}$ принадлежит классу $H(l, cA, \lambda)$, то достаточно показать, что

$$\int_{(\Lambda)} \int \mu_1(x, y) \frac{F(m_2) - F(m_0) + (\xi - x) F'_{\xi}(m_0) + (\eta - y) F'_{\eta}(m_0)}{\{ \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + [F]^2} \}^3} dx dy, \quad (29)$$

где $\mu_1 \in H(l, cA, \lambda)$, $F(x, y) \in H(l + 2, B, \lambda)$, принадлежит классу $H(l + 1, c'A, \lambda')$.

Доказательство этого утверждения такое же, как и для теоремы 3. Отметим небольшое различие.

Обозначив числитель подинтегральной функции в (29) через $\{F\}$, получим, дифференцируя по ξ :

$$\frac{\partial \{F\}}{\partial \xi} = (\xi - x) F''_{\xi\xi}(m_1)$$

и, следовательно, второй производной от $\{F\}$ по ξ не существует, если $F \in H(2, B, \lambda)$. Поэтому неравенства типа (10) доказать нельзя, но можно утверждать, что

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{R}{\rho} \right)_{m'_1} - \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{R}{\rho} \right)_{m_1} \right| < \frac{B_1 \delta}{\rho^3} + \frac{B_2 \delta^\lambda}{\rho^2},$$

где $m'_1(\xi_1, \eta_1)$ и $m_1(\xi, \eta)$ — точки, расстояние между которыми равно δ , и ρ — расстояние m_1 до точки $m_2(x, y)$, лежащей вне круга радиуса 2δ с центром в m_0 . Последнее неравенство позволяет сделать те же заключения, для вывода которых использовалось неравенство (10).

Аналогично, если $F \in H(1, B, \lambda)$, то $\{F\}$ производной по ξ не имеет и тогда нет неравенства (14), а следовательно, и (16). Оно заменяется легко доказываемым неравенством

$$\left| \left(\frac{R_1}{\rho} \right)_{m'_1} - \left(\frac{R_1}{\rho} \right)_{m_1} \right| < \frac{B_1 \delta^{1+\lambda}}{\rho^3} + \frac{B_2 \delta^\lambda}{\rho^2} + \frac{B_3 \rho^\lambda \delta}{\rho^3},$$

позволяющим сделать те же заключения, для вывода которых использовалось неравенство (16').

Таким образом, теорема 4 доказана.

Николай Максимович
ГЮНТЕР
(1871—1941)

БИОГРАФИЧЕСКИЙ ОЧЕРК
==
СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

БИОГРАФИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

Автор настоящей книги — заслуженный деятель науки, член-корреспондент Академии наук СССР, профессор Ленинградского университета Николай Максимович Гюнтер.

Он родился 5 декабря (ст. стиля) 1871 г. После окончания гимназии и физико-математического факультета Петербургского университета он был оставлен в 1894 г. при Университете акад. А. А. Марковым для подготовки к научной деятельности. С этого времени вся научная деятельность Н. М. Гюнтера была непрерывно связана с Университетом вплоть до его смерти — 4 мая 1941 г.

Жизнь Н. М. Гюнтера, небогатая внешними событиями, была полностью отдана науке и педагогической работе в Университете и ряде других высших учебных заведений Ленинграда.

Сорок семь лет Н. М. Гюнтер работал в Ленинградском университете, больше тридцати лет в Ленинградском институте инженеров путей сообщения и более двадцати лет в Педагогическом институте. В течение ряда лет он работал на Высших женских (Бестужевских) курсах и в Ленинградском политехническом институте. Педагогической работой Николай Максимович занимался до последнего месяца своей жизни, преодолевая тяжелую болезнь (рак легких), и только за две недели до смерти слег в постель. Один из авторов настоящего биографического очерка часто общался с ним и вспоминает, что и за эти последние две недели жизни все разговоры и интересы Николая Максимовича были направлены на вопросы науки и преподавания. Он совершенно не говорил о своей болезни. Когда, за несколько минут до смерти, он стал терять сознание, то это выразилось в том, что он начал читать лекцию. Незадолго до кончины Николаю Максимовичу была внезапно назначена операция. До помещения в больницу

оставалось два дня, и Николай Максимович просил экстренно устроить заседание Ученого совета Математического института Ленинградского университета, на котором он доложил результаты своей последней научной работы.

Исключительная преданность интересам науки и высокое чувство долга — отличали всю многолетнюю деятельность Н. М. Гюнтера.

Целый ряд разделов математики впервые были освещены в Ленинградском университете в специальных курсах Н. М. Гюнтера. Первый специальный курс „Теория алгебраических форм“ был им проведен в 1904 г. Огромная любовь к преподаванию своей науки красной нитью проходила через всю его деятельность. Он преподавал всегда творчески. Продумывая какой-либо новый курс, общий или специальный, он всегда вносил в него новые мысли, находил новые подходы к изложению материала. Лекции Гюнтера воспитывали особую культуру математической точности и строгости и привычку к ясному выражению мыслей.

Целый ряд математиков нашей страны прошел через непосредственное руководство Н. М. Гюнтера и помнит то внимание и ту необыкновенную отзывчивость, с которой Николай Максимович отнесся к каждой работе молодого ученого. Сурово критикуя работу, он умел подбодрить человека, вдохнуть в него уверенность, что затруднения преодолимы, и заставить его работать творчески самостоятельно. Одной из характерных черт всей деятельности Гюнтера было высокое чувство общественного долга, вытекающее из самого его существа. Эта черта проявлялась во всей его работе как преподавателя и организатора научной работы. Целый ряд лет он состоял председателем Ленинградского математического общества, и при нем деятельность Общества, до того вялая и незаметная, резко оживилась. Возник и стал регулярно выходить журнал.

Когда в 1905 г. были прекращены занятия в Петербургском университете, Н. М. Гюнтер организовал „Вольный университет“. Среди лекторов этого „Вольного университета“ был покойный акад. А. Н. Крылов, который прочел „Курс приближенных вычислений“, изданный им впоследствии в виде специальной книги.

Весьма интенсивной была деятельность Н. М. Гюнтера в Ленинградском университете. Неутомимый организатор

студенческих научных кружков, семинаров, он отдавал этому делу свою огромную кипучую энергию. Всюду вносил он высокую принципиальность, высокую организованность и энтузиазм. Непосредственно участвуя в научной жизни страны, он лично много сделал для расцвета этой жизни как глава большой научной школы и неутомимый организатор многих ценных начинаний.

Большой успех педагогической работы Н. М. Гюнтера, особенно прочитанных им специальных курсов, в первую очередь объясняется тем, что вся эта работа была непосредственно связана с его интенсивной творческой научной работой. Эта работа была основой всей его деятельности.

Н. М. Гюнтер любил говорить, что настоящий ученый работает все время, с утра и до вечера, а не только, когда он сидит за своим рабочим столом. Эти слова применимы прежде всего к нему самому.

Когда он обучался в Петербургском университете и начал в нем свою деятельность, в этом Университете были свежи традиции П. Л. Чебышева — одного из крупнейших математиков второй половины XIX века, основателя знаменитой Петербургской математической школы. Непосредственными учителями Н. М. Гюнтера были такие знаменитые представители этой школы, как А. А. Марков и А. Н. Коркин, и в работах Николая Максимовича мы имеем блестящее продолжение и развитие славных математических традиций Петербургской школы. Более поздние его работы по математической физике связаны с работами покойных академиков А. М. Ляпунова и В. А. Стеклова, имена которых, так же как и имени Н. М. Гюнтера, гордится математическая общественность нашей страны.

Ранние работы Н. М. Гюнтера относятся к общей теории дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и в частных производных. Эти работы по большей части непосредственно связаны с двумя диссертациями: его магистерской диссертацией „О приложениях теории алгебраических форм к интегрированию линейных дифференциальных уравнений“, которую он защитил в 1904 г., и его докторской диссертацией „К теории характеристик систем уравнений в частных производных“, которую он защитил в 1915 г.

Общая теория обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и, в частности, вопросы приложения алгебраических

форм к этой теории и разыскание тех случаев, когда уравнение интегрируется в алгебраических функциях, занимали большое место в математике второй половины XIX в. В магистерской диссертации Н. М. Гюнтера помещен список работ, связанных с темой диссертации. Этот список содержит больше ста работ. Среди них работы таких крупных математиков, как Фукс (Fuchs), Шварц (Schwarz), Дарбу (Darboux), Хальфен (Halphen) и др. В диссертации среди других вопросов исследована задача интегрирования линейного уравнения с рациональными коэффициентами, если известна в функции независимой переменной некоторая форма с постоянными коэффициентами, составленная из неизвестных частных решений. Даны достаточные условия того, что общий интеграл уравнения — алгебраическая функция, и рассмотрены некоторые случаи, когда эти условия не выполняются. На указанной основе построена теория уравнений второго порядка с общим алгебраическим интегралом. В этом же направлении рассматривается и теория уравнений третьего порядка. Кроме получения ряда конкретных новых результатов, в диссертации приведены общие соображения, из которых непосредственно вытекают полученные раньше результаты Фукса, Шварца, Клейна, Хальфена и др.

Работы Н. М. Гюнтера по общей теории уравнений в частных производных относятся к трем различным вопросам. Первый круг вопросов связан с теорией исключения и общими условиями интегрируемости систем уравнений. Если взять произвольную систему дифференциальных уравнений $F_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$) с несколькими функциями u_1, u_2, \dots, u_k от нескольких независимых переменных, такую, что в левые части этих уравнений входят производные от u_s до порядка n_s , а затем продифференцировать эти уравнения несколько раз то среди алгебраических следствий этих уравнений могут быть и такие, которые дают новые соотношения между производными от u_s порядка не выше n_s . Пример подобности рода дают системы первого порядка с одной функцией и их скобки Пуассона. Задача о характере и числе таких новых соотношений по существу совпадает со следующей задачей теории алгебраических форм: на данном базисе F_1, \dots, F_m алгебраических форм степени n_0 построен модуль, т. е. множество всех форм вида $\Phi = B_1 F_1 + \dots + B_m F_m$, где B_j — формы степени k ; найти все линейно независимые такие

формы данной степени и составить все зависимости вида $\Phi \equiv 0$. Эта задача была решена еще Гильбергом в 1890 г. Он установил, что все тождества $\Phi \equiv 0$ суть линейные комбинации некоторых s_0 таких тождеств. Им было указано число линейно независимых Φ для достаточно больших значений $k > k_0$. Теоремы Гильберга (Hilbert) содержали лишь доказательства существования чисел s_0 и k_0 . Оценки, выполненные его методом, давали для s_0 и k_0 громадные значения. Н. М. Гюнтер указал регулярный процесс для построения всех этих зависимостей. Вопросы эти представляют большие трудности. До работ Гюнтера было сделано несколько неудачных попыток. Лишь ему удалось разобрать этот вопрос полностью.

Ко второму направлению работ Н. М. Гюнтера по общей теории уравнений с частными производными надо отнести его локгорскую диссертацию „К теории характеристик систем уравнений в частных производных“. В этой работе он дает аналитическую теорию систем уравнений в частных производных весьма общего вида, так называемых систем Рикье. Им разобрана следующая задача, которую естественно называть задачей Коши: найти значения производных любого порядка от неизвестных функций u_1, \dots, u_n на данной поверхности $x_m = \psi(x_1, \dots, x_{m-1})$, зная значения лишь некоторых первых из них. Задача эта разработана с исчерпывающей полнотой.

В частности, Гюнтер дал полную классификацию характеристик систем Рикье.

Наконец, необходимо остановиться еще на работе об аналитических решениях уравнения $u_{xy} = f(x, y, u_x, \dots, u_{yy})$. В этой работе Н. М. Гюнтер разбирает задачу Гурса об определении решения по его значениям на двух пересекающихся кривых. Исследование проведено с большой полнотой. В этом исследовании Гюнтеру удалось в результате оценки коэффициентов разложения неизвестной функции, выполненной с помощью применения уравнений в конечных разностях, дать критерий существования аналитических решений этой задачи.

Огромными и разнообразными по содержанию и богатыми новыми идеями являются работы Н. М. Гюнтера по вопросам математической физики. Публикация этих работ началась в 1922 г. и продолжалась до последнего года его жизни.

Первый большой цикл этих работ образуют работы, посвященные одной из основных нелинейных проблем математической физики, а именно — задаче Коши и смешанной задаче для уравнений гидродинамики. Основным результатом в случае задачи Коши является установление существования и единственности решения уравнений гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости при наличии внешней силы, имеющей потенциал. При этом предполагается, что жидкость заполняет все пространство, и задано начальное поле скоростей. Это поле характеризуется тремя непрерывными функциями, имеющими ограниченные производные, которые могут терпеть разрыв при переходе через некоторые поверхности. Существование производных второго порядка у начального поля скоростей не предполагается. Исключая давление из уравнения гидродинамики применением к обеим частям этого уравнения операции расходимости и использованием формулы Пуассона, Гюнтер получил, переходя к составляющим скорости, три нелинейных интегральных уравнения для этих составляющих. Правые части этих уравнений представляют собою интеграл по времени от составляющих градиента некоторого ньютонова потенциала, плотность которого содержит нелинейно производные от составляющих скорости. К этим трем уравнениям добавляются еще три дифференциальных уравнения мгновенных линий тока, причем эти уравнения записываются в интегральной форме. Полученные шесть уравнений записываются в переменных Лагранжа, и к ним применяется метод последовательных приближений.

Большая часть работы посвящена изучению вторых производных ньютонова потенциала при малых предположениях относительно его плотности. Результаты этого изучения применяются при исследовании сходимости метода последовательных приближений.

Совершенно по-иному строится метод последовательных приближений для случая ограниченной задачи, т. е. для случая жидкости, заполняющей некоторый сосуд, который может перемещаться заданным образом с течением времени и деформироваться при неизменном объеме. Здесь, кроме начального условия, мы имеем и предельное условие на поверхности сосуда. В данном случае метод последовательных приближений построен не на поле скоростей, а на поле вихрей, и в качестве начального условия берется поле вихрей в на-

чальный момент времени. Предварительно Гюнтер вывел формулу, дающую поле скоростей по заданному полю вихрей в случае жидкости, заключенной в замкнутом сосуде. Для безграничного пространства такая формула была дана Гельмгольцем. В случае замкнутого сосуда задача получения такой формулы становится гораздо более сложной и требует решения задачи Неймана и преобразования некоторого потенциала простого слоя в потенциал двойного слоя, причем в окончательные формулы входят, между прочим, производные этого потенциала двойного слоя. Основой метода последовательных приближений здесь являются соотношения Коши, которые выражают составляющие вихря через их начальные значения и через производные от декартовых координат жидкой частицы по лагранжевым переменным. В качестве первого приближения для поля скоростей берется градиент гармонической функции, решающей задачу Неймана, соответствующую предельным условиям на границе сосуда. По этому полю скоростей строятся мгновенные линии тока, и упомянутые соотношения Коши дают первое приближение для поля вихрей. Упомянутые выше формулы дают по этому полю вихрей соответствующее поле скоростей. Таким образом получается второе приближение для поля скоростей, и процесс продолжается, как и выше. Метод последовательных приближений приводит к полю скоростей, которое удовлетворяет уравнениям Гельмгольца, вытекающим из соотношений Коши. Далее следует обширное исследование, в котором доказывалось, что полученное поле скоростей динамически возможно, т. е. позволяет определить из уравнений гидродинамики скалярное поле давления. Это сводится к доказательству того факта, что полученное поле скоростей, выраженное в переменных Лагранжа, имеет производную по времени, а эта последняя производная имеет производные по лагранжевым координатам. Наличие этих производных позволяет из наличия уравнений Гельмгольца заключить о возможности определения давления так, как это было указано выше. Как и в случае задачи Коши, сходимость процесса доказана для некоторого конечного промежутка времени.

Некоторые дополнительные осложнения возникают в том случае, когда область, занятая жидкостью, многосвязна. Эта громадная работа Гюнтера по смешанной задаче была

напечатана в период времени с 1926 до 1928 г. в Известиях Академии наук в виде большого мемуара, состоящего из шести частей.

Основная проблема гидродинамики, рассмотренная в работах Н. М. Гюнтера, математически родственна другой нелинейной проблеме гидродинамики, исторически связанной с Петербургским университетом. Около семидесяти лет тому назад П. Л. Чебышев предложил своему молодому ученику А. М. Ляпунову в качестве темы вопрос о фигурах равновесия жидкой вращающейся массы, частицы которой взаимодействуют по закону Ньютона. Одновременно с А. М. Ляпуновым этой же задачей занимался Пуанкаре (Poincaré). Встретив на пути строгого решения этой задачи большие трудности, Пуанкаре ограничился приближенным решением задачи и заявил, что подобная задача, имеющая наглядный физический смысл, не требует строго математического решения. В одной из своих работ А. М. Ляпунов возражает против такого мнения Пуанкаре и говорит, что после того, как задача поставлена математически, она должна решаться со всей необходимой математической строгостью. В своих фундаментальных работах по гидродинамике Гюнтер остался верным этому завету А. М. Ляпунова.

Для осуществления своих гидродинамических работ Н. М. Гюнтер провел ряд исследований по классической теории потенциала. В связи с этим он поставил себе задачу — систематически и строго изложить, на основе главным образом работ А. М. Ляпунова, всю теорию потенциала. Это и было сделано им в монографии „La theorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique“, перевод которой, с некоторыми дополнениями и является содержанием настоящей книги.

Одновременно с работами по гидродинамике в 1925 г. появляется работа Гюнтера о лемме Пуанкаре, в которой было обнаружено Гюнтером, что эта лемма, лежащая в основе многих работ по математической физике, доказана Пуанкаре только для областей, ограниченных выпуклыми поверхностями. В работе Гюнтера эта лемма была впервые доказана в общем случае области, ограниченной поверхностью Ляпунова. Доказательство требует тонких геометрических рассуждений, связанных с разбиением области на более мелкие части, для которых лемма может быть установлена.

Мы переходим теперь к большому циклу работ Н. М. Гюнтера, который имеет своим началом применение метода сглаживания, к операциям над функциями, не имеющими производных, и который затем привел его к новым постановкам задач математической физики и к систематическому применению понятия функций от областей и интегралов Стильтьеса к решению упомянутых задач в их новой постановке.

Работы Н. М. Гюнтера по гидродинамике неоднократно приводили его к необходимости оперировать с функциями, которые не имеют достаточного числа производных для того, чтобы к ним можно было применять обычные для рассматриваемого вопроса методы рассуждения. В ряде работ Гюнтер применяет к такого рода вопросам анализа метод сглаживания. Этот метод, неоднократно применявшийся в работах В. А. Стеклова, состоит в замене функции интегралом от нее по малому переменному промежутку $(x, x+h)$, деленному на длину h этого промежутка. Этот прием может применяться и в случае нескольких переменных. Полученную таким образом функцию Гюнтер называл обычно функцией Стеклова. Первой работой Гюнтера в этом направлении была работа „О действиях над функциями, не имеющими производных“ (Известия Академии наук, 1924). В этой работе он занимается прежде всего решением уравнений $\operatorname{rot} X = A$ и $\operatorname{grad} X = A$, где A — заданный вектор, являющийся непрерывной функцией точки, и X — искомый вектор. Наличие производных у составляющих заданного вектора не предполагается. В работе дается необходимое и достаточное условие разрешимости упомянутых уравнений. Если построить векторный ньютонов потенциал B , приняв за плотность заданный вектор A , то для разрешимости первого из указанных уравнений необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{div} B$ была гармонической функцией, а для разрешимости второго уравнения необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rot} B$ был гармоническим вектором. В этой же работе Гюнтер рассмотрел задачу в другой постановке, а именно — он заменил упомянутые уравнения интегральными соотношениями, которые получаются интегрированием уравнений по некоторой области и применением формулы Гаусса. Упомянутые условия оказываются необходимыми и достаточными и для разрешимости полученных интегральных соотношений, причем составляющие заданного вектора достаточно

считать только ограниченными интегрируемыми функциями, а искомого вектора — непрерывными функциями.

Мы остановились более подробно на содержании упомянутой работы, так как она выясняет те исходные точки зрения, которые затем привели Н. М. Гюнтера к коренному пересмотру самих постановок задач математической физики. Метод сглаживания, естественно, привел Гюнтера к общему понятию аддитивной функции от области. Вместо этого понятия он обычно пользовался понятием средней функции. Это есть частное от деления функции от области на меру области. Существенным моментом теории является определение совокупности тех областей или множеств, для которых определена функция. Этот момент играет в дальнейшем роль при построении понятия интеграла от средней функции. Впервые понятие средней функции было применено Гюнтером в задаче разложения заданной функции по функциям Корна (Korn). В 1932 г. Гюнтер опубликовал в Трудах Физико-математического института им. В. А. Стеклова большую работу, содержащую около пятисот страниц, под заглавием: „*Sur les intégrales de Stieltjes et leurs applications aux problèmes de la physique mathématique*“. Первые две главы этой работы содержат систематическое изложение теории средних функций и интегрального исчисления для этих функций. В третьей главе на этой основе строится теория интегральных уравнений. Эти исследования Н. М. Гюнтера соприкасаются с исследованиями Радона (Radon) и Рисса (Riesz).

Позднее Н. М. Гюнтер в ряде мемуаров вернулся к общей теории интегральных уравнений в интегралах Стильтеса и, пользуясь представлением резольвенты в звезде Миттаг-Леффлера (Mittag-Leffler), построил спектральную функцию для широкого класса таких уравнений. Эти работы Гюнтера имеют много точек соприкосновения с известными работами Вейля (Weyl) и Карлемана (Carleman) по теории сингулярных интегральных уравнений. В одной из своих заметок Гюнтер показал, что частным случаем построенной им теории интегральных уравнений является теория нагруженных интегральных уравнений, развитая в работах Кнезера (Kneser) и Лихтенштейна (Lichtenstein). В ряде работ Н. М. Гюнтер дал исчерпывающее исследование ядер специального типа, а именно — ядер Фурье, и интегральных уравнений с такими ядрами.

До сих пор мы говорили лишь о математических вопросах, связанных с теорией средних функций. Главным стимулом развития этой теории для Гюнтера являлись вопросы математической физики. В 1928 г. Лебег (Lebesgue) во втором издании своей книги „*Leçons sur l'intégration...*“ подчеркивает ту роль, которую должны играть функции областей в вопросах математической физики. До настоящего времени здесь использовалось понятие функции точки только потому, что имела широко развитая теория таких функций, а соответствующей теории функции от областей не было построено.

Использование понятия функции точки привело математическую физику к абстрактным понятиям, которые не соответствуют реальной действительности явления, и основные уравнения математической физики строятся в терминах этих абстрактных понятий. Ряд искусственных дополнительных ограничений, которые приходится накладывать для решения задач математической физики, происходит именно вследствие неправильной их постановки. Вместо того, чтобы говорить о температуре в данной точке, естественнее говорить о средней температуре в данной области; вместо того, чтобы говорить о скорости в данный момент времени, естественнее говорить о средней скорости за данный промежуток времени; вместо того, чтобы говорить о нормальной производной в данной точке поверхности, естественнее говорить о потоке через заданную область поверхности и т. д. Принципиальное освещение этой точки зрения на ряде примеров было дано Гюнтером в чрезвычайно отчетливой и яркой форме в нескольких небольших заметках. Назовем, например, работы „*La théorie des fonctions de domaines dans la physique mathématique*“ (Prace matematyczne-fizyczne, 1935); „О сглаживании функций“ (Ученые записки ЛГУ, 1937) и „О постановке некоторых задач математической физики“ (Ученые записки ЛГУ, 1940). Гюнтер не ограничился новой постановкой задач, но фактически провел решение в новой постановке для целого ряда задач математической физики. •

В упомянутой выше большой работе 1932 г. Н. М. Гюнтер проводит с новой точки зрения теорию потенциала и решение задач Дирихле и Неймана. Остановимся, например, на постановке задачи Дирихле. Положим, на поверхности S тела D задана некоторая средняя функция $\varphi(\tau)$ от площадок этой поверхности. Ищется гармоническая функция внутри D при

условии, чтобы ее среднее значение по площадке σ_1 , которая стремится к площадке σ , лежащей на S , стремилось бы к $\varphi(\sigma)$. Задача имеет определенное решение, если $\varphi(\sigma)$ — непрерывна. Здесь новая точка зрения касается только предельных условий. Можно проникнуть с ней и в оператор Лапласа. Сдвигая область ω в некотором направлении l , мы, естественно, приходим к понятию производной $\varphi'_l(\omega)$ от функции области $\varphi(\omega)$ по направлению l . Сумма производных второго порядка по трем взаимно перпендикулярным направлениям дает оператор Лапласа $\Delta\varphi(\omega)$ от функции от области. Если $v(x)$ есть ньютонов потенциал, плотность которого есть некоторая средняя функция, и $v(\omega)$ есть средняя функция $v(x)$, то, как показал Гюнтер, имеет место обобщенная формула Пуассона. Наряду с этой формулой Гюнтер вводит новое определение потока $\sigma(v)$ через поверхность σ , — определение, которое не требует производной от v , но включает в себе интеграл по σ от произведения vK , где K — средняя кривизна σ . Для этого потока Гюнтер установил формулу: $\Delta v(\omega) \omega = \sigma(v) \sigma$. Все это дало ему возможность поставить и решить ограниченную задачу теплопроводности на основе понятия потока гепла. Это сделано в последней главе упомянутой выше работы 1932 г.

Неожиданным является применение теории потенциала и обобщенного оператора Лапласа к задаче об общем виде линейного непрерывного функционала $U\{\varphi(x)\}$ в пространстве непрерывных функций $\varphi(x)$ трех независимых переменных. Радон показал, что задача решается в виде интеграла Стильтьеса от произведения $\varphi(x)u(\omega)d\omega$, где $u(\omega)$ — некоторая функция области. В работе „Sur les opérations linéaires“ (Phys. Zeitschr. der Sowjetunion, 1933) Гюнтер показал, что функция $u(\omega)$ может быть построена следующим образом. Надо применить функционал U к среднему значению потенциала Ньютона по области ω с плотностью, равной единице. В результате получится некоторая функция области ω , и оператор Лапласа этой функции, поделенный на (-4π) , и даст $u(\omega)$.

В последних работах Н. М. Гюнтер приложил свои общие идеи к рассмотрению задачи о малых колебаниях струны. Основным является формула, выражающая отклонение струны в виде интеграла от произведения функции Грина на сумму внешней силы и силы инерции. Заменяя ускорение средним изменением скорости и переходя к средним функциям во

внешней нагрузке и искомом отклонении, Гюнтер получил интегро-дифференциальное уравнение. Это уравнение было им решено при предположениях, которые вполне оправдываются физическим смыслом задачи.

В истории математической физики настоящий момент является переломным. В результате проникновения в магнетическую физику идей и методов современной теории функций вещественной переменной и функционального анализа коренным образом меняются наши представления о постановке задач математической физики, о методах их решения и о самом понятии решения задачи. Эта перестройка математической физики находится в связи и с теми глубокими новыми идеями, которые теперь возникают в теоретической физике. В той новой математической физике, которая теперь строится, работы Н. М. Гюнтера займут почетное место. Для этих работ характерной является следующая мысль, которую Н. М. Гюнтер высказал в одном из своих последних мемуаров. Он говорит, что при применении метода сглаживания „задача, имеющая целью разобрань явление внешнего мира, отчасти освобождается от стеснительных условий, наложенных на нее по необходимости, вследствие ограниченности наших средств, и природа, освобожденная от этих стеснений, начинает открывать свои тайны“.

Но не только научные, педагогические и общественные заслуги нужно отмечать, вспоминая о Н. М. Гюнтере. Все, имевшие близкое общение с ним, до конца своей жизни сохраняют память об этом человеке, который во всей своей деятельности и в своих отношениях к людям был кристально правдивым и честным человеком. Были у Н. М. Гюнтера друзья, но самым большим его другом была правда.

В. И. Смирнов

С. Л. Соболев

СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

1895

1. О нахождении дробных рациональных интегралов линейных дифференциальных уравнений. — Математ. сборник, 1895, т. XVII, вып. 4, стр. 680—701.

1899

2. Геометрия. — (Прилож. к „Малому энциклопедическому словарю“, СПб., 1899), 31 стр., 2 вкл. л. черт.

3. О линейных уравнениях с правильными интегралами, интегрируемых в гипергеометрических функциях. — В кн. Сборник Инст. инж. путей сообщ., 1899, вып. L, стр. 305—342.

1903

4. Аналитическая геометрия. Лекции, читанные в 1902/3 акад. году. СПб., тип. И. Трофимова, 1903, 650, 2 неп. стр. (Инст. инж. путей сообщ. ц.) (Литографиров.).

Прибавление к курсу „Аналитической геометрии“ (1), XV стр. Написано от руки.

5. О приложениях теории алгебраических форм к интегрированию линейных дифференциальных уравнений. Рассуждение Н. М. Гюн-гера. СПб., тип. Ю. Н. Эрлих, 1903, 219 стр.

6. Введение в анализ. Издание Женских педагогических курсов. (Литографиров.). СПб., 1903—1904, стр. 1—319.

1904

7. Аналитическая геометрия. Лекции, читанные в 1902/3 и 1903/4 гг. в Инст. инж. путей сообщ. СПб., изд. Инст. инж. путей сообщ., 1904, 403 стр., с 177 черт.

То же. Сборник Инст. инж. путей сообщ., 1904, вып. LXIII, стр. 1—403 отд. паг.

8. Введение в анализ. Лекции, читанные в 1903—1904 году. СПб., изд. Высш. женск. курсов, 1903—1904, 271 стр., с черт. (Литографиров.).

1906

9. Введение в анализ. Ч. 1, СПб., изд. Высш. женск. курсов, 1905—1906, 151, 4 стр., с черт. (Литографиров.).

1907

10. Введение в анализ. Ч. II. СПб., изд. Высш. женск. курсов, 1906—1907, 171, IV стр., с черт. (Литографиров.).

11. Исчисление конечных разностей. СПб., изд. Комитета при физ.-мат. фак., 1907, 229 стр., с черт. и табл. (Литографиров.).

1908

12. Аналитическая геометрия. Лекции, читанные в Инст. инж. путей сообщ. Изд. 2-е, доп., СПб., тип. Ю. Н. Эрлих, 1908, 469, 2 нен. стр., с 175 черт.

1909

13. Введение в анализ. Вып. 1. Лекции, читанные на СПб. Высш. женск. курсах, СПб., тип. Ю. Н. Эрлих, 1909, 246 стр., с 16 черт.

14. Исчисление конечных разностей. СПб., изд. Комитета при физ.-мат. фак., 1909, 195, 2 нен. стр., с черт. и табл. (Литографиров.).

1910

15. Введение в анализ. Дополнит. статьи. СПб., изд. Высш. женск. курсов, 1909—1910, 26 стр. (Литографиров.).

16. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. Курс лекций, прочитанных в 1909—1910 гг. СПб., изд. Высш. женск. курсов, 1909—1910, 266, 2 нен. стр., с черт. (Литографиров.).

17. К теории характеристик систем уравнений в частных производных с одной неизвестной функцией от m независимых переменных. — Дневник XII Съезда русских естествоиспытателей и врачей. (М., 1910), стр. 315—316 (№ 8).

1911

18. Высшая алгебра. Лекции, читанные в Инст. инж. путей сообщ. СПб., изд. Студ. 6-ки Инст. инж. путей сообщ., 1911, 102 стр., с черт. (Литографиров.).

19. Замечания по поводу мемуара E. Delassus, под заглавием: „Extension du théorème de Cauchy aux systèmes d'equations aux dérivées partielles“. — В кн.: Сборник Инст. инж. путей сообщ., 1911 (1910), вып. LXXX, стр. 1—2, отд. паг.

20. Интегральное исчисление. Лекции, читанные в Инст. инж. путей сообщ. СПб., изд. Студ. 6-ки Инст. инж. путей сообщ., 1911, 77 стр., с 19 черт. (Литографиров.).

21. К вопросу о характеристиках системы уравнений в частных производных со многими неизвестными функциями. — В кн.: Сборник Инст. инж. путей сообщ., 1911 (1910), вып. LXXX, стр. 1—24, отд. паг.

1912

22. Дифференциальное исчисление. Лекции. СПб., изд. Комитета при физ.-мат. фак. Высш. женск. курсов, 1912, 311 стр., с черт. (Литографиров.).

23. Дифференциальное исчисление. Лекции. 1 семестр. Изд. 2-е, СПб., изд. Студ. б-ки Инст. инж. путей сообщ., 1912 (Литографиров.).

24. Интегральное исчисление. Лекции. СПб., изд. Комитета при физ.-мат. фак. Высш. женск. курсов, 1912, 90 стр., с черт. (Литографиров.).

25. Сборник задач по высшей математике. СПб., изд. Инст. инж. путей сообщ., 1912, 2. 0 стр., с 50 черт. (Совместно с А. А. Адамовым, А. П. Вилижаниным, А. И. Захаровым и др.).

1913

26. Введение в анализ. По лекциям проф. Н. М. Гюнтера. Изд. 1-е. СПб., изд. Комитета при физ.-мат. фак. СПб. унив., 1912—1913, 497 стр., с черт. (Литографиров.).

27. К теории характеристик систем уравнений в частных производных. Рассуждение Н. М. Гюнтера. СПб., тип. А. Э. Коллинс, 1913, 378 стр.

28. О зависимостях, связывающих данные однопородные функции. — В кн.: Сборник Инст. инж. путей сообщ., 1913, вып. LXXXIV, стр. 1—20, отд. паг.

29. О канонической форме систем однородных уравнений. — В кн.: Сборник Инст. инж. путей сообщ., 1913, вып. LXXXIV, стр. 1—22, отд. паг.

30. Об одном неравенстве из теории целых рациональных функций. — В кн.: Сборник Инст. инж. путей сообщ., 1913, вып. LXXXIV, стр. 1—18, отд. паг.

31. Теория рядов. Лекции. СПб., изд. Комитета при физ.-мат. фак. Высш. женск. курсов, 1913, 51 стр. (Литографиров.).

32. Sur les caractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles. — C. R. de l'Acad. des sciences à Paris 1913, t. CLVI, № 15, pp. 1147—1150.

33. Sur la forme canonique des équations algébriques. — Comptes Rendus de l'Académie des sciences à Paris. 1913, t. CLVII, № 15, pp. 577—580.

1914

34. Введение в анализ. По лекциям проф. Н. М. Гюнтера. Изд. 2-е. СПб., изд. Комитета при физ.-мат. фак. СПб. унив., 1913—1914, 497 стр., с черт. (Литографиров.).

35. Высшая математика. Стд. I и II. Пг., изд. Студ. б-ки (Инст. инж. путей сообщ.), 1914, 454 стр., с черт.

36. Об исключении. Пг., Сборник Инст. инж. путей сообщ., 1914, т. LXXXV, стр. 1—10.

37. Теория рядов. Лекции. СПб., изд. Комитета при физ.-мат. фак. Высш. женск. курсов, 1914, 51 стр. (Литографиров.).

38. Sur la théorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles (I). — C. R. de l'Acad. des sciences à Paris, 1914, t. CLVIII, № 12, pp. 853—856.

39. Sur la théorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles (II). — C. R. de l'Acad. des sciences à Paris, 1914, t. CLVIII, № 16, pp. 1108—1111.

1915

40. Аналитическая геометрия. Лекции, читанные в Инст. инж. путей сообщ., Изд. 3-е. Пг., изд. Инст. инж. путей сообщ., 1915, 179 стр., с 176 черт.

То же. Сборник Инст. инж. путей сообщ., 1915, вып. LXXXVIII. (На обл. 1914).

41. Введение в анализ. По лекциям проф. Н. М. Гюнтера. Изд. 3-е. Пг., изд. Комитета при физ.-мат. фак. Пг. унив., 1914—1915, 398 стр., с черт.

42. Высшая математика. I. Теория пределов. II. Дифференциальное исчисление. III. Интегральное исчисление. IV. Высшая алгебра. Пг., изд. Студ. б-ки, 1915, 431 стр., с черт. (Инст. инж. путей сообщ.). (Литографиров.).

43. Дифференциальное исчисление. Лекции. Пг., изд. Комитета при физ.-мат. фак. Высш. женск. курсов, 1914—1915, 281 стр., с черт. (Литографиров.).

44. Сборник задач по высшей математике. Изд. 2-е. Пг., изд. Инст. инж. путей сообщ., 1915, 290, 1 нен. стр., с 57 черт. (Совместно с А. А. Адамовым, А. П. Вилижаниным, А. Н. Захаровым и др.).

1916

45. О системах линейных уравнений первого порядка в частных производных с двумя переменными независимыми. Пг., изд. Инст. инж. путей сообщ., 1916, 30 стр., с 2 черт.

1918

46. Высшая математика. Пг., изд. Студ. б-ки Инст. инж. путей сообщ., 1918, 304 стр., со мног. черт.

1923

47. Краткий курс тригонометрии. Пг., „Сятедь“, 1923, 108, 1 нен. стр., с 39 черт.

48. О педагогической деятельности А. А. Маркова. — Изв. Акад. наук СССР, VI сер., 1923, т. XVII, № 1—18, стр. 35—44.

49. Об одной вспомогательной теореме. — Изв. Акад. наук СССР, VI сер., 1923, т. XVII, № 1—18, стр. 53—64.

50. Sur un problème d'hydrodynamique. — C. R. de l'Acad. des sciences à Paris, 1923, t. CLXXVII, № 17, pp. 865—867.

51. Sur un théorème auxiliaire. — C. R. de l'Acad. des sciences à Paris, 1923, t. CLXXVI, № 17, pp. 1115—1117.

1924

52. О действиях над функциями, не имеющими производных. (1). — Изв. Акад. наук СССР, VI сер., 1924, т. XVIII, № 12—18, стр. 353—372.

53. Об аналитических решениях уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$.— Математ. сборник, 1924, т. XXXII, вып. 1, стр. 26—42. (Резюме на франц. яз.).

54. Сборник задач по высшей математике. (Изд. 3-е, сокращ.). Л., Гос. изд-во, 1924, 226 стр., с черт. и табл. (Редакция совместно с Я. Д. Тамаркиным, Я. В. Успенским и А. А. Фридманом).

55. Sur la résolution des équations $\text{Rot } X = A$, $\text{grad } X = A$.— В кн.: Proceedings of the International mathematical Congress of Toronto, 1924, pp. 535—541. Из книг Н. М. Гюнтера.

56. Sur quelques applications des fonctions de W. Stekloff (V. Steklov).— Доклады Акад. наук СССР, сер. А, 1924, стр. 35—38.

57. Sur un problème fondamental de l'hydrodynamique.— В кн.: Proc. of the Internat. mathemat. congress of Toronto, 1924, pp. 543—548. Из книг Н. М. Гюнтера.

1925

58. О движении жидкости, заключенной в данном перемещающемся сосуде.— Доклады Акад. наук СССР, сер. А, 1925, декабрь, стр. 152—155.

59. О действиях над функциями, не имеющими производных. II. Изв. Акад. наук СССР, VI сер., 1925, т. XIX, № 1—5, стр. 75—96.

60. О распространении теоремы Коши на любую систему уравнений в частных производных.— Математ. сборник, 1925, т. XXXII, вып. 2, стр. 367—443. (Резюме на франц. яз.).

61. О решениях уравнений гидродинамики.— Изв. Акад. наук СССР, VI сер., 1925, т. XIX, № 6—8, стр. 217—232.

62. Об уравнении $\frac{dv}{dt} + U \frac{dv}{dx} + V \frac{dv}{dy} + W \frac{dv}{dz} = f$.— Математ. сборник, 1925, т. XXXII, вып. 2, стр. 278—304. (Резюме на франц. яз.).

63. Sur un lemme de M. Poincaré.— C. R. de l'Acad. des sciences à Paris, 1925, t. CLXXXI, № 19, pp. 649—651.

1926

64. О движении жидкости, заключенной в данном перемещающемся сосуде. Ч. I. Нахождение скоростей в случае односвязной области. Гл. I. Сообщ. 1-е.— Изв. Акад. наук СССР, VI сер., 1926, т. XX, № 13—14, стр. 1323—1348.

65. То же. Ч. II, гл. 2. Нахождение скоростей по начальным составляющим вихря в случае односвязной области.— Изв. Акад. наук СССР, VI сер., 1926, т. XX, № 15—17, стр. 1503—1532.

66. О лемме Пуанкаре.— Математ. сборник, 1926, т. XXXIII, вып. 3, стр. 291—331, с 6 черт. (Резюме на франц. яз.).

67. О нахождении скорости по вихрю в случае жидкости, заключенной в замкнутом сосуде.— Журн. Ленингр. физ.-мат. общ., 1926, т. I, вып. 1, стр. 12—36. (Резюме на франц. яз.).

68. Памяти А. А. Фридмана.— Журн. Ленингр. физ.-мат. общ., 1926, т. I, вып. 1, стр. 5—9. (Речь, произнесенная 26 сентября 1925 г.).

69. Sur le mouvement d'un fluide remplissant un domaine simplement connexe qui se déplace.— C. R. de l'Acad. des sciences à Paris, 1926, t. CLXXXIII, № 1, pp. 17—19.

70. Sur le mouvement d'un fluide remplissant un domaine à connexion multiple qui se déplace.— C. R. de l'Acad. des sciences à Paris, 1926, t. CLXXXIII, № 2, pp. 114—116.

71. Sur une application des fonctions universelles de M. A. Korn.— C. R. de l'Acad. des sciences à Paris, 1926, t. CLXXXIII, № 14, pp. 551—553.

72. Über ein Hauptproblem der Hydrodynamik.— Mathemat. Zeitschrift, 1926, Bd. XXIV, S. 448—499.

1927

73. Замечание о теореме Morera.— В кн.: In Memoriam N. J. Lobatschevskii. Voll. II (Казань), 1927, стр. 156—162.

74. О движении жидкости, заключенной в данном перемещающемся сосуде. Ч. III, гл. 3. Производные по времени от составляющих скорости.— Изв. Акад. наук СССР, VI сер., 1927, т. XXI, № 7—8, стр. 621—650.

75. То же. Ч. IV.— Изв. Акад. наук СССР, VI сер., 1927, т. XXI, № 9—11, стр. 735—756.

76. То же. Ч. V, гл. 4. Случай многосвязной области.— Изв. Акад. наук СССР, VI сер., 1927, № 15—17, стр. 1139—1162.

77. Об одном приложении теории замкнутости. Ч. I.— Изв. Акад. наук СССР, VI сер., 1927, № 1—2, стр. 63—94.

78. Об одном приложении теории замкнутости. Ч. II.— Изв. Акад. наук СССР, VI сер., 1927, № 3—4, стр. 255—272.

79. Об основной задаче гидродинамики.— Изв. Физ.-мат. инст. им. В. А. Стеклова, 1927, т. II, стр. 1—168, с 3 табл.

80. Об уравнениях гидродинамики.— Журн. Ленингр. физ.-мат. общ., 1927, т. I, вып. 2, стр. 240—247. (Резюме на франц. яз.).

1928

81. Замечание об интегралах Стильеса.— В кн.: Труды Всеросс. математ. съезда (М., 27 апреля—4 мая 1927 г.). М.—Л., 1928, стр. 193—195.

82. О движении жидкости в многосвязной области.— В кн.: Труды Всеросс. математ. съезда (М., 27 апреля—4 мая 1927 г.). М.—Л., 1928, стр. 256—258.

83. О движении жидкости, заключенной в данном перемещающемся сосуде. Ч. VI.— Изв. Акад. наук СССР, VII сер., отдел. физ.-мат. наук, 1928, № 1, стр. 9—30.

84. О задаче Неймана.— Математ. сборник, 1928, т. XXXV, вып. 1, стр. 139—219. (Резюме на франц. яз.).

85. О линейных уравнениях первого порядка в частных производных с двумя независимыми переменными.— В кн.: Сборник Ленингр. инст. инж. путей сообщ., Л., 1928, вып. XCVII, ч. III (Строит. и прикл. механика и математика), стр. 115—126, с 2 черт. (Резюме на англ. яз.).

86. О научных достижениях В. А. Стеклова.— В кн.: Памяти В. А. Стеклова, Л., 1928, стр. 1—12.

87. Труды В. А. Стеклова по математической физике.— В кн.: Памяти В. А. Стеклова, Л., 1928, стр. 49—77.

1929

88. Дополнение к статье: „О системах линейных уравнений первого порядка в частных производных с двумя переменными независимыми“.— В кн.: Сборник Ленингр. инст. инж. путей сообщ., Л., 1929, вып. CI (Прикл. механика, геодезия, математика), стр. 315—325. (Резюме на англ. яз.).

89. Сборник задач по высшей математике. Изд. 4-е, доп. и испр. М.—Л., Гос. изд-во, 1929. Ч. I, 256 стр., с черт. Ч. II, 135 стр. с 8 черт. (Совместно с А. А. Адамовым, А. П. Вилижаниным, А. Н. Захаровым и др.).

90. Sur une application des intégrales de Stieltjes au problème de Neumann.— C. R. de l'Acad. des sciences à Paris, 1929, t. CLXXXIX, № 13, pp. 447—450.

1930

91. Сборник задач по высшей математике. Изд. 5-е, доп. и испр. М.—Л., Гос. изд-во, 1930. Ч. I, 256 стр., с черт. (Совместно с А. А. Адамовым, А. П. Вилижаниным, А. Н. Захаровым и др.).

92. Sur les intégrales de Stieltjes généralisées.— Atti del Congresso internazionale dei matematici (Bologna, 3—10 sett., 1928), t. II, Bologna (1930), pp. 313—324.

1931

93. Основы математической физики. Ч. I. Интегральные уравнения. Л., Центр. тип. Наркомвоенмора, 1931, 176 стр., с 3 черт. (Литографиров.).

94. Сборник задач по высшей математике. Ч. I. Изд. 6-е, М.—Л., Гос. научно-техн. изд-во, 1931, 256 стр., с 49 черт. (Совместно с А. А. Адамовым, А. П. Вилижаниным, А. Н. Захаровым и др.).

95. Сборник задач по высшей математике. Ч. II. Изд. 5-е, доп. и испр. М.—Л., Гос. изд-во, 1931, 169 стр., с черт. (Совместно с А. А. Адамовым, А. П. Вилижаниным, А. Н. Захаровым и др.).

96. Sur le mouvement d'un liquide enfermé dans un vase qui se déplace.— В кн.: Atti del Congresso internazionale dei matematici (Bologna, 3—10 sett., 1928), t. V, Bologna (1931), pp. 183—191.

1932

97. Памяти В. А. Стеклова.— Записки Харьківського Математ. Товариства і Українськ. інст. математ. наук, 1932, сер. 4, т. V, стр. 3—5.

98. Сборник задач по высшей математике. Изд. 7-е, испр. и доп. Л.—М., Гос. техн.-теорет. изд-во, 1932. Ч. I, 230 стр., с 33 черт. Ч. II, 300 стр., с 89 черт. (Переработка под редакцией Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина).

99. Les fonctions moyennes et les Intégrales de Stieltjes.— В кн.: *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker Kongress* (Zürich, 1932), II Bd., Zürich und Leipzig, s. a., S. 128—129. (Краткое изложение доклада).

100. Sur le potentiel newtonien.— C. R. de l'Acad. des sciences à Paris, 1932, t. CXCV, № 5, pp. 446—449.

101. Sur le problème du refroidissement.— C. R. de l'Acad. des sciences à Paris, 1932, t. CXCV, № 6, pp. 538—541.

102. Sur les Intégrales de Stieltjes et leurs applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique. Л., Изд-во Акад. наук СССР, 1932, 494 стр. (Труды Физ.-мат. инст. им. В. А. Стеклова, т. I).

1933

103. Сборник задач по высшей математике. Изд. 8-е, Л.—М. Гос. техн.-теорет. изд-во, 1933. Ч. I, 280 стр., с 40 черт. Ч. II, 312 стр., с 31 черт. (Переработка под редакцией Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина).

104. Сборник задач по высшей математике. Ч. III, Л.—М., Гос. техн.-теорет. изд-во, 1933, 368 стр., с 35 черт. (Переработка под редакцией Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина).

105. Sur le problème des „Belastete Integralgleichungen“.— *Studia mathematica*, 1933, t. IV, pp. 8—14.

106. Sur les Opérations Inéales.— *Physika'. Zeitschr. d. Sowjet Union*, 1933, Bd. III, N. 2, S. 115—139.

107. Э. Уиттекер и Г. Робинсон. Математическая обработка результатов наблюдений. Перев. с англ. В. М. Озерецкого, Н. С. Самойловой и В. П. Цесевича. Л.—М., Гос. техн.-теорет. изд-во, 1933, 363, 1 нен. стр., с 19 рис. (Редакция перевода Н. М. Гюнтера).

1934

108. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. Л.—М., Гос. техн.-теорет. изд-во, 1934, 359 стр., с 2 черт.

109. Сборник задач по высшей математике. Ч. II, изд. 9-е, Л.—М., Гос. техн.-теорет. изд-во, 1934, 312 стр., с 31 черт. (Переработка под редакцией Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина).

110. La theorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique, Paris, Gauthier—Villars, 1934, 303 pp., avec 49 fig.

1935

111. Интегралы Стильеса в математической физике и в теории интегральных уравнений.— В кн.: Труды 2 Всес. математ. съезда (Л., 24—30 июня 1934 г.), 1935, т. I, стр. 271—317, с 9 черт.

112. О спектральной функции некоторых эрмитовых интегральных уравнений.— Доклады Акад. наук СССР, нов. сер., 1935, т. IV, № 8—9, стр. 299—302.

113. La theorie des fonctions de domaines dans la physique mathématique.— *Prace matematyczno-fizyczne* (Warszawa), 1935, vol. XLIV, pp. 33—50. Publié à la mémoire de L. Lichtenstein).

114. Sur la fonction spectrale de certaines équations intégrales hermitiennes.—C. R. (Doklady) de l'Acad. des sciences de l'URSS, nouv. sér., 1935, vol. IV, № 8—9, pp. 315—318.

115. Sur la résolvante de certaines équations intégrales hermitiennes.—C. R. de l'Acad. des sciences à Paris, 1935, t. CC, № 31, pp. 1714—1716.

116. Sur quelques applications nouvelles de la théorie des fonctions de domaines à la théorie des équations intégrales. I partie.—Математ. сборник, 1935, т. XLII, вып. 3, стр. 279—384. (Резюме на русск. яз.).

117. Э. Уиттекер и Г. Робинсон. Математическая обработка результатов наблюдений. Перев. с англ. В. М. Озерского, Н. С. Самойловой и В. П. Цесевича. Изд. 2-е. Л.—М., Главн. ред. общетехн. лит-ры, 1935, 363, 1 неп. стр., с 19 рис. (Редакция Н. М. Гюнтера).

1936

118. О модулях алгебраических форм.—В кн.: Труды I Всес. съезда математиков (Харьков, 1930). М.—Л., 1936, стр. 240—253.

119. О распространении сферических волн в газах.—Труды Ленингр. индустр. инст., 1936, № 10, раздел физ.-мат. наук, вып. 3, стр. 17—29.

120. Об одном интеграле, аналогичном интегралу Фурье.—Доклады Акад. наук СССР, нов. сер., 1936, т. IV, № 7, стр. 289—291.

121. Sur les équations intégrales aux noyaux du type Fourier de M. H. Weyl. Журн. Инст. математ. Акад. наук УССР, 1936, № 2, стр. 21—46.

122. Sur une intégrale analogue à l'intégrale de Fourier.—C. R. (Doklady) de l'Acad. des sciences de l'URSS, nouv. sér., 1936, vol. IV (XIII), № 7 (III), p. 301—303.

123. Шарль Эрмит. Курс анализа. Перев. В. М. Озерского с 4 франц. изд. Л.—М., Главн. ред. общетехн. лит-ры, 1936, 383 стр., с 69 рис. (Редакция Н. М. Гюнтера).

124. Sur la théorie de fermeture. Rendic. del Circolo Matcm. di Palermo, t. LX, 1936, p. 1—11.

1937

125. О сглаживании функции и связанных с ним задачах.—Ученые записки ЛГУ (№ 17), 1937, т. III, стр. 51—78.

126. Сборник задач по высшей математике. Ч. I, 9-е испр. изд., Л.—М., Гл. ред. техн.-теорет. лит-ры, 1937, 272 стр., с 40 черт. (Редакция совместно с Р. О. Кузьминым).

127. Sur les noyaux du type Fourier.—Изв. Акад. наук СССР. ОМЕМ, сер. матем., 1937, № 3, стр. 315—354. (Резюме на русск. яз.).

128. Sur quelques applications nouvelles de la théorie des fonctions de domaines à la théorie des équations intégrales (Seconde partie). (О некоторых новых приложениях теории функций от областей к теории интегральных уравнений. Вторая часть).—Математ. сборник, нов. сер., 1937, т. II (XLIV), вып. 2, стр. 197—274. (Резюме на русск. яз.).

129. Sur quelques applications nouvelles de la théorie des fonctions de domaines à la théorie des équations intégrales. (Seconde partie). (Fin). (О некоторых новых приложениях теории функций от областей

к теории интегральных уравнений). (Вторая часть). (Окончание).— Математ. сборник, нов. сер., 1937, т. II (XLIV), вып. 3, стр. 387—463. (Резюме на русск. яз.).

130. Sur les pouaux du type Fourier. Изв. Акад. наук СССР, сер. матем., № 3, 1937, стр. 315—354. (Резюме на русск. яз.).

1938

131. Збірник задач в вищій математики. Ч. I. Пер. в рос. 9 вид. Харьк., Держ. наук.-техн. вид-во, 1938, 244 стр., с черт. (Переработка под ред. проф. Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина).

132. К теории интегралов Стильбеса - - Радона и интегральных уравнений.— Доклады Акад. наук СССР, нов. сер., 1938, т. XXI, № 5, стр. 219—223.

133. Сборник задач по высшей математике. Ч. I. 10-е испр. изд. Л.—М., Гл. ред. техн.-теорет. лит-ры, 1938 (Редакция совместно с Р. О. Кузьминым), 272 стр., с 40 черт.

134. Сборник задач по высшей математике. Ч. III. 2-е испр. изд. Л.—М., Гл. ред. техн.-теорет. лит-ры, 1938, 339 стр., с 35 черт (Редакция совместно с Р. О. Кузьминым).

1939

135. К общей теории интегральных уравнений. Доклады Акад. наук СССР, т. XXII, № 5, 1939, стр. 215—219.

1940

136. О постановке некоторых задач математической физики. Ученые записки ЛГУ, № 59, стр. 12—26.

1941

137. Замечание об интегралах Hellinger'a. Доклады Акад. наук СССР, т. XXX, № 2, 1941, стр. 99—102.

138. Об интегральных уравнениях третьего рода. Доклады Акад. наук СССР, т. XXX, № 8, 1941, стр. 677—680.

1948

139. К задаче о малых колебаниях струны. Ученые записки ЛГУ, серия матем., вып. 15, 1948 (посмертно).
